

微積分及び演習I・自習シート

問 1

定義 微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数といい

$$\int f(x)dx$$

とかく. 一般に $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると, 定数 C を加えた関数も $f(x)$ の原始関数となり

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

とかける.

次の原始関数を定数 C を付けて求めよ.

(1) $\int \sqrt[5]{x} \, dx$

(2) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(3) $\int 2x\sqrt{x^2+1} \, dx$

(4) $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$

(5) $\int x^2 e^{2x} dx$

(6) $\int \tan x \, dx$

(7) $\int \log x \, dx$

(8) $\int \text{Tan}^{-1} x \, dx$

(9) $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$

問 2 [2 次式と分数型の積分] 以下の積分公式を用いると次の 4 つのグループの積分が計算できる:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C \quad (= \operatorname{Sinh}^{-1}x + C),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{Sin}^{-1}x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Tan}^{-1}x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (= \operatorname{Tanh}^{-1}x + C)$$

例題

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}} dx$$

は分母の 2 次関数 $-x^2 + 4x$ が

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X = \frac{x-2}{2}$ とおくと (全体を 4 で割ることを見据えて)

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -(x-2)^2 + 4 \\ &= 4 \left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1 \right) \\ &= 4(1 - X^2) \end{aligned}$$

となり, $dX = \frac{1}{2}dx$ より $2dX = dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-X^2)}} 2dX = \int \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} dX$$

ゆえに 2 番目の公式を用いれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} dX = \operatorname{Sin}^{-1}X + C = \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

を得る.

例題を参考に次を計算せよ.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2-6x+13} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{-4x^2+8x-3} dx$$

発展 一般に $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば、 $C' = 0$ より $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数となる。しかし $f(x)$ の原始関数が $F(x) + C$ で全て網羅されているかどうかはまだ分からない。 $y = \cos x$ の原始関数は $y = \sin x + C$ だけだろうか。 $y = \sin x + C$ とは全く異なる、まだ我々の知らない何か別の関数があって、微分したら $y = \cos x$ になるかもしれない。

しかしそのようなことはなく、 $f(x)$ の原始関数どうしの違いは定数だけであることを示していく。

$F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の任意の原始関数とする。このとき F_1 と F_2 の差は高々定数である¹⁾ことを示せ。ただし、関数 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\forall x \in [a, b], g'(x) = 0$ ならば g は定数関数であることを用いてもよい。

¹⁾ 違いがあってもその差は定数という意味。