

微積分及び演習 I・自習シート

問 1 逆関数の微分法を用いて次の関数を微分せよ.

(1) $y = \text{Cos}^{-1}x$

(2) $y = \text{Tan}^{-1}x$

(3) $y = x^{1/n}$ (ただし, $n \in \mathbb{N}$)

問 2 $f(x) = x^2$ は $x = 0$ で連続である. これを ε - δ 論法で示すと次のようになる:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall x : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$$

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする.

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

となる x の範囲を先に見積もっておくと

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |x^2 - 0| \\ &= x^2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

より, $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ であればよい.

$\delta_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon}$ とおくと, $x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ に対して, $x^2 < \varepsilon$ なので

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= |x^2 - 0| \\ &= x^2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

よって成立. □

この例を参考に $f(x) = 2x$ は $x = 1$ で連続であることを ε - δ 論法で示せ. また $f(x) = x^2$ は $x = 1$ で連続であることを ε - δ 論法で示せ.

問 3 次の関数の $x = 0$ における連続性と微分可能性を調べよ.

(1)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$