

微積分及び演習I・自習シート

問1 [高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(6) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(7) f(x) = \log(1+x^2)$$

問2 次の値を求めよ.

$$(1) \sin^{-1}(-1)$$

$$(2) \sin^{-1}(-1/2)$$

$$(3) \sin^{-1}(1/\sqrt{2})$$

$$(4) \cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$$

$$(5) \cos^{-1}(0)$$

$$(6) \cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$$

$$(7) \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$(8) \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$$

$$(9) \tan^{-1}(-1)$$

問3 $a \in [0, 1]$ とする. $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続ならば $f - g$ も連続であることを ε - δ 論法で示せ.

問4 $a, c \in \mathbb{R}$ とする. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続ならば cf も点 $x = a$ で連続であることを ε - δ 論法で示せ.

発展 $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする. 「 f は I 上で連続である」とは任意の点 $a \in I$ で連続であることが定義なので,

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon, a} > 0 \text{ s.t.}$$

$$\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon, a}, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が ε - δ 論法による厳密な定義となる. ここで, $\delta_{\varepsilon, a}$ は $\varepsilon > 0$ に依存するが, $a \in I$ にも依存することに注意する. 言い換えると区間 I 上で連続の証明は点 $a \in I$ ごとに確かめるため $\delta_{\varepsilon} > 0$ が点 a にも依存しているということ. この $\delta_{\varepsilon, a}$ が a に依存せずに選べるとき, すなわち

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \text{ s.t.}$$

$$\forall x \in I, \forall a \in I : 0 < |x - a| < \delta_{\varepsilon}, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

を満たすとき, 「 f は I 上で一様連続である」という. 「 $\forall a \in I$ 」の位置に注意. 次の問いに答えよ.

- (1) $a \in I$ とする. $f(x) = 2x$ は点 $x = a$ において連続であることを証明せよ.
- (2) $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続であることを証明せよ.
- (3) $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続であることを証明せよ.
- (4) $g(x) = x^2$ は $I := [0, 1]$ において一様連続であることを証明せよ.
- (5) $g(x) = x^2$ は $I := [0, \infty)$ において一様連続でないことを証明せよ.