2025/06/13/No.9

微積分及び演習 I・自習シート

問 [高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = 2x$

(2) $f(x) = 2$

(3) $f(x) = x^2$

(4) $f(x) = \sqrt{x}$

(5) $f(x) = \sin x$

(6) $f(x) = \sin 2x$

(7) $f(x) = \sin x^2$

(8) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(9) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

(10) $f(x) = 2^x$

(11) $f(x) = e^x$

(12) $f(x) = e^{2x}$

(13) $f(x) = e^{x^2}$

(14) $f(x) = 1/(1+x^2)$

(15) $f(x) = e^x \sin x$

(16) $f(x) = \tan x$

(17) $f(x) = \log x \ (x > 0)$

(18) $f(x) = \log(\tan x) \ (0 < x < \pi/2)$

(19) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \ (x > 0)$

(20) $f(x) = x^x \ (x > 0)$

解答

(1) $f'(x) = 2$

(2) $f'(x) = 0$

(3) $f'(x) = 2x$

(4)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(5) $f'(x) = \cos x$

(6) $f'(x) = (\cos 2x)(2x)' = 2\cos 2x$

(7) $f'(x) = (\cos x^2)(x^2)' = 2x\cos x^2$

(8)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(9)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}(1+\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

(10) $f'(x) = (\log 2)2^x$

(11) $f'(x) = e^x$

(12) $f'(x) = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$

(13) $f'(x) = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{2x}$

(14)

$$f'(x) = -1(1+x^2)^{-2}(1+x^2)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

(15) $f'(x) = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

(16)

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(17) $f'(x) = 1/x\ (x > 0)$

(18)

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x}(\tan x)' = \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cos x} \quad (0 < x < \pi/2)$$

(19)

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(20) $x > 0$ とし, $y = f(x)$ とおく. $\log y = \log(x^x) = x\log x$ より右辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}(x\log x) = (x)'\log x + x(\log x)' = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1$$

一方, 左辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}y'$$

つまり

$$\frac{1}{y}y' = 1 + \log x$$

よって

$$f'(x) = y' = y(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

発展 教科書 p.64 の定理 2.2 を参考に, 次の定理を証明せよ:

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$ とし, $f \in C([a,b])$ とする.

(1) 像 $f([a,b])$ は $\mathbb{R}$ の有界な集合である.

証明　像 $f([a,b])$ が $\mathbb{R}$ の有界な集合であることを背理法で示す. $f([a,b])$ が有界ではないと仮定すると, 有界であることの否定

$$\neg \boxed{\exists M > 0 \boxed{\forall y \in f([a,b]), \boxed{|y| \leq M}}}$$

より

$$\boxed{\forall M > 0 \boxed{\exists y \in f([a,b]), \boxed{|y| > M}}}$$

なので, 特に $M > 0$ として自然数 $n \in \mathbb{N}$ を選んでも, やはり ${}^{\exists}y_n \in f([a,b])$ s.t.

$$|y_n| > n$$

が成立する. 像の定義より, ${}^{\exists}x_n \in [a,b]$ s.t. $y_n = f(x_n)$. ここで, 数列 $\{x_n\}$ は区間 $[a,b]$ に含まれているので有界である. よって, Bolzano–Weierstrass の定理より, 部分列 $\{x_{n_k}\}$ とその収束先 $c \in [a,b]$ が存在して,

$$x_{n_k} \to c \quad (k \to +\infty).$$

一方, f は連続なので,

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(c) \quad (k \to +\infty).$$

しかし, 先程の条件より

$$|y_{n_k}| > n_k$$

であり, $k \to +\infty$ のとき n_k が発散することから矛盾する. □

(2) f は最大値をもつ. つまり, ${}^{\exists}c \in [a,b]$ s.t.

$${}^{\forall}x \in [a,b], \quad f(x) \leq f(c).$$

証明　(1) より $A := f([a,b])$ は有界であるので, $\sup A$ が存在する. そこで $a_0 := \sup A$ とおく. 最小上界の定義より, ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$, ${}^{\exists}a_n \in A$ s.t.

$$a_0 - \frac{1}{n} < a_n, \quad \text{つまり} \quad -\frac{1}{n} < a_n - a_0.$$

一方, 最小上界は上界の 1 つなので

$${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_0, \quad \text{つまり} \quad a_n - a_0 \leq 0 < \frac{1}{n}.$$

が成立する. これらを合わせれば

$$|a_n - a_0| < \frac{1}{n}$$

より, $a_n \to a_0$ が分かる．ここで, 像の定義より, ${}^\exists x_n \in [a, b]$ s.t.

$$a_n = f(x_n)$$

数列 $\{x_n\}$ は区間 $[a, b]$ に含まれているので有界である．よって, Bolzano–Weierstrass の定理より, 部分列 $\{x_{n_k}\}$ とその収束先 $c \in [a, b]$ が存在して,

$$x_{n_k} \to c \quad (k \to +\infty).$$

一方, f は連続なので,

$$a_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(c) \quad (k \to +\infty).$$

しかし, 先程の条件より収束先は 1 つなので

$$a_0 = f(c)$$

である．a_0 は $A = f([a, b])$ の最小上界と置いたので, 上界の 1 つである．よって

$${}^\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq f(c).$$

$\square$