

微積分及び演習I・自習シート

問1 X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ とする. 次を証明せよ.

(1) $B \subset Y$ ならば

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

解答例 (⊃) を示す. $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ とする. 逆像の定義より $x \in X$ かつ $f(x) \in Y \setminus B$ である. つまり, 差の定義より $f(x) \in Y$ かつ $f(x) \notin B$ である. このとき, 逆像の定義より $x \notin f^{-1}(B)$ である. よって,

$$x \in X \setminus f^{-1}(B)$$

を得る. よって (⊃) が成立.

(⊂) を示す. $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ とする. 差の定義より $x \in X$ かつ $x \notin f^{-1}(B)$ である. このとき, 逆像の定義より $f(x) \notin B$ である. 写像の定義から $f(x) \in Y$ なので,

$$f(x) \in Y \setminus B$$

つまり, 逆像の定義より

$$x \in f^{-1}(Y \setminus B)$$

を得る. よって (⊂) が成立.

以上により, 等号が成立. □

(2) $B_\alpha \subset Y$ (ただし, $\alpha \in I$ は添え字) ならば

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

解答例 (⊃) を示す. $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha)$ とする. 逆像の定義より, ($x \in X$ かつ) $f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ である. さらに, 和集合の定義より $\exists \alpha_x \in I$ s.t.

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

つまり, 逆像の定義より $x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$. ゆえに和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

を得る. よって (⊃) が成立.

(⊂) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする. 和集合の定義より, $\exists \alpha_x \in I$ s.t.

$$x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$$

つまり, 逆像の定義より

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

再び和集合の定義より $f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ である. ゆえに逆像の定義より

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right)$$

を得る. よって (⊃) が成立.

以上により, 等号が成立.

□

(3) $A_\alpha \subset X$ (ただし, $\alpha \in I$ は添え字) ならば

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

解答例 (⊂) を示す. $y \in f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$ とする. 像の定義より, $\exists x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$ である. ここで, 和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}$$

つまり, 像の定義より $y \in f(A_{\alpha_0})$. ゆえに和集合の定義より

$$y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を得る. よって (⊂) が成立.

(⊃) を示す. $y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$y \in f(A_{\alpha_0})$$

ここで, 像の定義より $\exists x \in A_{\alpha_0}$ s.t. $y = f(x)$ である. この x について

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

なので, 像の定義より

$$y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$$

を得る. よって (⊃) が成立.

以上により, 等号が成立.

□

(4) $A_\alpha \subset X$ (ただし, $\alpha \in I$ は添え字) ならば

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

解答例 $y \in f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ とする. 像の定義より $\exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$. この x について共通部分の定義より

$$\forall \alpha \in I, \quad x \in A_\alpha$$

つまり, 像の定義より

$$\forall \alpha \in I, \quad y \in f(A_\alpha)$$

となり, 共通部分の定義より

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を得る. よって成立. □

問2 問1の(4)の逆向きの包含関係は一般には成立しない. その例を見つける. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とする.

$$f(A_1 \cap A_2) \not\supset f(A_1) \cap f(A_2)$$

となるような A_1 と A_2 の例を見つけよ.

解答例 例えば $A_1 := (-2, 1)$, $A_2 := (-1, 3)$ とすると

$$f(A_1) = [0, 4), \quad f(A_2) = [0, 9)$$

よって

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4)$$

である. 一方, $A_1 \cap A_2 = (-1, 1)$ であるので

$$f(A_1 \cap A_2) = [0, 1)$$

となる. ゆえに, $f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$ は成立していない. □

問3 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する¹⁾. このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ.

解答例 まず全射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ を示せばよい. 必ず $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は成立するので, $f(\mathbb{R}^2) \supset \mathbb{R}^2$ を示せばよい. $y \in \mathbb{R}^2$ とする. $y \in f(\mathbb{R}^2)$ を示せばよい, つまり $\exists x \in \mathbb{R}^2$ s.t. $y = f(x)$ を示せばよい.

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと, それは

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1, \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

を満たすかどうか, つまり連立方程式が解けるかどうかと同値である. 上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 = dy_1, \\ bcx_1 + bdx_2 = by_2, \end{cases}$$

¹⁾

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とは $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ のこと.

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = dy_1 - by_2$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \frac{1}{ad - bc}(dy_1 - by_2),$$

また, 上に代入して

$$\begin{aligned} \frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) + bx_2 &= y_1, \\ bx_2 &= \frac{ad - bc}{ad - bc}y_1 - \frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) = \frac{-bc}{ad - bc}y_1 + \frac{ab}{ad - bc}y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{ad - bc}(-cy_1 + ay_2) \end{aligned}$$

を得る. つまり $\exists x \in \mathbb{R}^2$ s.t. $y = f(x)$ が示された. すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる.

次に単射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

とおく. 単射の定義の対偶から

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \quad f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 \\ c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

に対して, $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよい. $f(x) = f(\tilde{x})$ とすると

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2, \\ cx_1 + dx_2 &= c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2. \end{cases}$$

上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 &= ad\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \\ bcx_1 + bdx_2 &= bc\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \end{cases}$$

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = (ad - bc)\tilde{x}_1$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \tilde{x}_1$$

を得る. 次にこれを上に代入すれば $b \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られ, 下に代入すれば $d \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ を得る. つまり $b \neq 0$ もしくは $d \neq 0$ のどちらかが仮定されていれば $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られることになるが, $b = d = 0$, つまりそのどちらも成立しないときは $ad - bc \neq 0$ を満たさなくなるので, これらの仮定は全て $ad - bc \neq 0$ の仮定でまとめられる. すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

別解 線形代数の知識を使えば証明は簡潔になる. 実際,

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと, $f(x) = Ax$ を意味し, $ad - bc \neq 0$ の条件から A は正則行列すなわち $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (単位行列) を満たす行列 A^{-1} が存在する. また A^{-1} は

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で得られていた. 上記解答例に合わせて議論していくと, 任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して, $y \in f(\mathbb{R}^2)$, つまりある $x \in \mathbb{R}^2$ が存在して $y = f(x)$ となるかどうかを考える. $A^{-1}A = E$ であったことに注意して

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y$$

の左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}Ax = A^{-1}y, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を得る. すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる. 単射についても $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよいが, $Ax = A\tilde{x}$ の両辺に A^{-1} を写像としてかければ $x = \tilde{x}$ を得る. すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

問4 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とし, さらに $h: X \rightarrow Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$

と定義する (合成写像). (1) と (2) を証明せよ.

(1) h が単射であれば, f も単射である.

解答例 背理法で示す. もし f が単射でないならば $\exists x_1, x_2 \in X$ s.t.

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{かつ} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

このとき, $g: Y \rightarrow Z$ は写像なので $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ を満たす, つまり

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

となり, h が単射であることに矛盾する. よって f は単射である. □

(2) h が全射であれば, g も全射である.

解答例 $g(Y) = Z$, すなわち, $g(Y) \subset Z$ かつ $g(Y) \supset Z$ を示せばよい. 像の定義から $g(Y) \subset Z$ は常に成り立つ. 次に $g(Y) \supset Z$ を示す. $z \in Z$ とする. このとき $\exists y \in Y$ s.t.

$$z = g(y)$$

であることを示せばよい. $z \in Z$ とすると, h が全射より $\exists x \in X$ s.t.

$$z = h(x).$$

このとき, $f: X \rightarrow Y$ より $y = f(x)$ とおくと $y \in Y$ を満たす, つまり

$$z = h(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となり, $g(Y) \supset Z$ が証明できたので, $g(Y) = Z$, すなわち g は全射である. $\square$