

微積分及び演習I・自習シート

問1 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、収束先は必ず1つに定まることを ε - N 論法で証明していく。次の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおく。

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\alpha - \beta| < \varepsilon$$

であることを証明せよ。

解答例 収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおくと、仮定より $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall n \geq N_\beta, \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そこで、 $N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおくと、

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

もちろん、 $n := N_\varepsilon$ でも成立するので

$$|a_{N_\varepsilon} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{N_\varepsilon} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - a_{N_\varepsilon} + a_{N_\varepsilon} - \beta| \\ &\leq |\alpha - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon} - \beta| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) 収束先は必ず1つに定まることを証明せよ。

解答例 (1) より $\varepsilon > 0$ の任意性から

$$|\alpha - \beta| \leq 0,$$

つまり、 $\alpha = \beta$. よって、収束先は必ず1つに定まる。 □

問2 $\{a_n\}$ を有界な実数列とし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$$

とおく、すなわち

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \dots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \dots\}.$$

次に、各 S_n の最小上界、最大下界を使って数列 $\{\bar{a}_n\}$, $\{\underline{a}_n\}$ を次のように定義する:

$$\bar{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.$$

このとき、 $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少列、 $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であることをそれぞれ証明せよ。

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点をしておくこと。提出しなくても試験で60点以上取れば合格です。

解答例 $n \in \mathbb{N}$ とする. S_n と S_{n+1} に対して, $S_{n+1} \subset S_n$ より

$$\sup S_{n+1} \leq \sup S_n, \quad \inf S_{n+1} \geq \inf S_n,$$

すなわち

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bar{a}_{n+1} \leq \bar{a}_n, \quad \underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}.$$

以上により $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少列であり $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列である.

問 3 数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n := 2n$$

とおく. $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ として

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k := 3k$$

を満たすように n_k を定める. $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_9}$ の値をそれぞれ求めよ.

解答例

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} a_n & : & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18, & 20, & \dots, & 2n, \\ & & & & a_{n_1} & & & a_{n_2} & & & a_{n_3} & & & \\ a_{n_k} & : & & 6, & & & & 12, & & & 18, & & & \dots \end{array}$$

$a_n = 2n$ の n として $n_k = 3k$ を代入すると $a_{n_k} := 2 \cdot 3k = 6k$. よって, $a_{n_1} = 6$, $a_{n_2} = 12$, $a_{n_9} = 54$.