

微積分及び演習I・自習シート

問1 一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}$ の0への収束を ε - N 論法で証明せよ.

$$(1) a_n := \frac{1}{n^2}$$

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $n^2 \geq n$ より

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $\forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

別解

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと,

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2, \quad \text{つまり,} \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon^2} < \varepsilon.$$

よって, $\forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon^2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$(2) a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$$

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $\forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

問 2 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする. 次の問に答えよ.

(1) E が上に有界であることの定義を論理記号 (全称記号 ($\forall$), 存在記号 ($\exists$)) を用いてかけ.

解答例 $\exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall x \in E, x \leq k.$

(2) (1) の否定を作り E が上に有界でないことの定義を論理記号でかけ.

解答例 $\exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall x \in E, x \leq k$ の否定なので $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x_k \in E \text{ s.t. } x_k > k.$ 例えば

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq k}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg \left[\exists k \in \mathbb{R} \left[\forall x \in E \left[x \leq k \right] \right] \right]$$

を

$$\forall k \in \mathbb{R} \left[\exists x \in E \left[x > k \right] \right]$$

と入れかえによって求められる.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が以下を満たすとき, $+\infty$ に発散すると定義する: $\forall k \in \mathbb{R}, \exists N_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_k, \quad a_n > k.$$

数列 $\{b_n\}$ を $b_n := n$ と定義すると, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散することを証明せよ.

解答例 $k \in \mathbb{R}$ とする. アルキメデスの原理より, $\exists N_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$k < N_k.$$

よって,

$$\forall n \geq N_k, \quad b_n = n \geq N_k > k$$

より, $\{b_n\}$ は $+\infty$ に発散する.

(4) 数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散することの定義を論理記号で書け.

解答例 $\forall k \in \mathbb{R}, \exists N_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_k, \quad a_n < k.$$

発展 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

を証明せよ. (テキスト P.35–36 を参考に, 収束列は有界列であることをうまく使う.)

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$\{a_n\}$ は収束列であるので有界である. すなわち, $\exists M > 0$ s.t.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

$\varepsilon > 0$ とする. 仮定から $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_a, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)},$$

$$\forall n \geq N_\beta, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

そこで, $N_\varepsilon := \max\{N_a, N_b\}$ とおくと, $\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となるので

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &\leq M |b_n - b| + (|b| + 1) |a_n - a| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + (|b| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n b_n \rightarrow ab \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

注

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \end{aligned}$$

の式変形から予想して, 仮定より $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)},$$

$$\forall n \geq N_\beta, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a_n| + 1)}$$

とすればよさそうな気がするが (講義で話したとおり $+1$ は分母が 0 にならないための工夫), しかし

$$\frac{\varepsilon}{2(|a_n| + 1)}$$

が n に依存しているのでよくない. 実際, a_n が a に収束することの定義は, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

であったが, これは「どんな半径 ε を選んでもある番号が存在してその番号以降では数列 a_n と収束先 a の距離が ε 未満となる」であった. 半径 $\varepsilon/2(|a_n| + 1)$ が番号 n によらず定まっていたはじめて収束の定義が使える.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \end{aligned}$$

と変形しても同じことである. そのため, 収束列は有界列であることから n に依存しない正定数 M を持ち出している.