

微積分及び演習I・自習シート

問1 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ をそれぞれ空でない下に有界な集合とする. また

$$E := \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in E_1, \exists y \in E_2 \text{ s.t. } z = x + y\}$$

とおく. このとき,

$$\inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

を証明せよ.

解答例 $\alpha := \inf E_1, \beta := \inf E_2$ とおく. $\inf$ の定義より $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E_1, \exists y_\varepsilon \in E_2$ s.t.

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{2} > x_\varepsilon, \quad \beta + \frac{\varepsilon}{2} > y_\varepsilon$$

を満たす. $x_\varepsilon + y_\varepsilon \in E$ に注意すれば $\inf$ の定義より

$$\alpha + \beta + \varepsilon > x_\varepsilon + y_\varepsilon \geq \inf E.$$

ここで $\varepsilon > 0$ の任意性から

$$\alpha + \beta \geq \inf E,$$

つまり

$$\inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

が成立する. □

注: 講義で学んだことなども含めると, このように定義される E に対しては,

$$\sup E \leq \sup E_1 + \sup E_2, \quad \sup E \geq \sup E_1 + \sup E_2,$$

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2, \quad \inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

のいずれも成立するので, それぞれ等号

$$\sup E = \sup E_1 + \sup E_2, \quad \inf E = \inf E_1 + \inf E_2,$$

が成立する.

問2 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq x \quad (\forall x \in E)$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく. E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ.

解答例 仮定より E は下に有界なので $\inf E \in \mathbb{R}$ が存在する. そこで $\alpha := \min E, \beta := \inf E$ とおき, $\alpha = \beta$ を示す. まず, $\inf$ の定義から

$$\beta \leq x \quad (\forall x \in E).$$

ここで, $\min$ の定義から $\alpha \in E$ より

$$\beta \leq \alpha.$$

次に, $\min$ の定義から α は E の下界の 1 つである. 一方 β は E の最大下界であるので

$$\alpha \leq \beta.$$

ゆえに $\alpha = \beta$. □

別解 $\alpha \leq \beta$ の証明について, $\inf$ の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x_\varepsilon \in E$ が存在して

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon.$$

ここで, α は E の最小値なので

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon \geq \alpha,$$

すなわち,

$$\alpha < \beta + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\alpha \leq \beta$$

と示すこともできる.

問 3 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$b_n : 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ を集合 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とみると,

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$$

である¹⁾. 数列 $\{b_n\}$ を集合 $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ と見たとき, $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ を元を列挙する形で求めよ.

¹⁾ 数列には順番があり, 例えば, 一般項が $a_n := n$ で定義される数列

$$a_n : 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

において第 2 項と第 3 項を入れ換えた

$$b_n : 1, 3, 2, 4, 5, \dots$$

とは別の数列と見なす. しかし集合と見なす場合には, 順番は関係なく $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ どちらも

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

である.

解答例 $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 0\}$. (もちろん $\{0, -1\}$ と書いてもよい.)

(2) 数列の $\sup$ を

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

で定義する. つまり, 数列を集合とみた最小上界と定義する. このとき,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

であることを示せ.

解答例 まず

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}, \quad \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, -1\}$$

より

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = 0.$$

一方, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = 0$ に注意すると

$$\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

より

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) = \sup\{0\} = 0$$

よって

$$0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < 1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

を得る. □

注意: 問 1 の場合のように E と定義される場合の等式とは異なることに注意する. 実際, $E_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $E_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくと, 例えば $a_1 + b_2$ は E に含まれているが $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ には含まれない. つまり, 問 1 で定義される E と $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ は一致せず

$$\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E = \{a_n + b_m : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}.$$

このように数列については

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n,$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n + \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

のみが成立する.

問 4 次を証明せよ.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$$

解答例 (C) を示す. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/n]$ とする. 和集合の定義より $\exists n_x \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n_x}\right]$$

すなわち, $0 \leq x \leq 1 - 1/n_x$. ここで,

$$0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n_x} < 1$$

より

$$x \in [0, 1).$$

ゆえに (C) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in [0, 1)$ とする. すなわち, $0 \leq x < 1$. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/n]$ を背理法で示す. もしそうでないなら

$$\neg \left[\exists n \in \mathbb{N} \left[x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \right] \right]$$

つまり

$$\left[\forall n \in \mathbb{N} \left[x \notin \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \right] \right]$$

これは, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x < 0 \text{ または } x > 1 - \frac{1}{n}$$

となるが, $x \in [0, 1)$ より,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x > 1 - \frac{1}{n}$$

となる. このとき, $1 - x > 0$ に注意すると

$$\frac{1}{n} > 1 - x,$$

$$n < \frac{1}{1 - x}.$$

つまり, $1/(1 - x)$ は $\mathbb{N}$ の上界となり, アルキメデスの原理に矛盾する. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - 1/n]$ となり, ($\supset$) が成立する.

以上より等号成立.

□