

微積分及び演習I・自習シート

問1 a, b, c, d, e の5つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b, c, d, e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**全て**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は A_1, A_2, A_3 のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の3つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問2 実数の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(1) $a < b$.

(2) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(3) $\forall x \in E, x \leq a$.

(4) $\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 \geq b$.

(5) $\exists k \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in E, x \leq k$.

解答例 (1) $a \geq b$. (2) $a \in E$. (3) $\exists x \in E$ s.t. $x > a$. (4) $\forall x \in E, x < b$. (5) $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x \in E$ s.t. $x > k$.

解説 (2) 「 $a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$ 」の否定なので「 $a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$ 」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので $a \in E$. (3) 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$ 」の否定なので、ある $x \in E$ が存在して、それが反例となる. つまり $\exists x \in E$ s.t. $x > a$. (4) 「ある $x_0 \in E$ が存在して $x_0 \geq b$ 」の否定なので、任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ、つまり $\forall x \in E, x < b$. ここで、 $\forall x_0 \in E, x_0 < b$ でもよいが、わざわざ x に添え字 0 をつける必要がない.

$$\sum_{k=1}^n k$$

という和の表記を

$$\sum_{k_0=1}^n k_0$$

と書いても間違いではないが 0 をつける必要がないことと同じ. (5) 「ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $x \in E$ に対して $x \leq k$ 」の否定なので「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、『任意の $x \in E$ に対して $x \leq k$ 』が成り立たない」つまり、「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、『ある $x \in E$ が存在して $x > k$ 』」.

注 (5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには、

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq k}}}$$

と本質だけ抽出してその否定、

$$\neg \boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq k}}}$$

を

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exists x \in E \quad \boxed{x > k}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め、必要に応じてあらためて $\forall k \in \mathbb{R}$, $\exists x \in E$ s.t. $x > k$ と機械的に得ることもできる. ここで「 $\neg$ 」は否定を表す記号.

問 3 A_α, B を集合とする. ただし、 $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ.

(1)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(2)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(3)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

証明 (1) (C) を示す. $x \in B \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ とする. 差の定義より $x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, つまり, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ が成立する (実際, もしそうでないならば, $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, そのとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). つまり, $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

よって, (C) が成立.

(C) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, 差の定義より $x \in B$ かつ $x \notin A_{\alpha_0}$, つまり $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ (実際, もしそうでないならば, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となるが, そのとき $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となり矛盾). よって, 差の定義より

$$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

よって (C) が成立.

以上により等号が成立. □

(2) (C) を示す. $x \in B \cup (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より $x \in B$, または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

(i) $x \in B$ のとき, $\forall \alpha \in I, x \in B \cup A_\alpha$. よって共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ のとき, 共通部分の定義より $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$, つまり $x \in B \cup A_\alpha$. 再び共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

よって, (C) が成立.

(C) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$ とする. 共通部分の定義より $\forall \alpha \in I, x \in B \cup A_\alpha$.

(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$.

(ii) $x \notin B$ のとき, $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ が成立する (実際, もしそうでないなら, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ となるが, $x \notin B$ なので, $x \notin B \cup A_{\alpha_0}$ となり矛盾). ゆえに共通部分の定義より $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

よって (C) が成立.

以上により等号が成立. □

(3) (C) を示す. $x \in (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ とする. 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \notin A_{\alpha_0}$$

(実際, もしそうでなければ, $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, このとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c.$$

(⊃) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$ とする. 和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$$

(実際, もしそうでなければ, $\forall \alpha \in I, x \in A_{\alpha}$ となるが, $x \notin A_{\alpha_0}$ に矛盾). ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c.$$

よって (⊃) が成立.

以上により等号が成立.

□

問 3 (2) の注

(⊃) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_{\alpha})$ とする. 共通部分の定義より $\forall \alpha \in I, x \in B \cup A_{\alpha}$.

(i) $x \in B$ のとき...

(ii) $x \in A_{\alpha}$ のとき...

と場合分けしてしまうと, 結論にたどり着けない. **すべての $\alpha \in I$ に対して**

(i) $x \in B$ のとき...

(ii) $x \in A_{\alpha}$ のとき...

と場合分けすることはできるが, (ii) のとき $x \in A_{\alpha}$ だからといって,

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$$

と結論づけることはできないからである. 一見すると「**すべての $\alpha \in I$ に対して**」と言っているので良さそうだが, 論理構造は次の通りである.

すべての $\alpha \in I$ に対して α を止めるたびに

(i) $x \in B$ のとき... $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)$. (ii) $x \in A_{\alpha}$ のとき... !?

内側の四角の中で (ii) においても, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)$ という結論まで得なければならぬが, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)$ は**すべての $\alpha \in I$ に対して α を止めるたびに**得られる結論ではない. 初回の講義で証明した

$$B \cup (A_1 \cap A_2) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$$

の形を思い出すとよい. $(\supset)$ を示す際に, $x \in (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$ とすると, $x \in B \cup A_1$ かつ $x \in B \cup A_2$ に場合分けでき, これを $(x \in B \text{ または } x \in A_1) \text{ かつ } (x \in B \text{ または } x \in A_2)$ と書いてみる. ここで, $I = \{1, 2\}$ とおくと

すべての $\alpha \in I$ に対して α を止めるたびに

(i) $x \in B$ のとき... (ii) $x \in A_\alpha$ のとき...

とは

$\alpha = 1$ に対して

(i) $x \in B$ のとき... (ii) $x \in A_1$ のとき...

$\alpha = 2$ に対して

(1) $x \in B$ のとき... (2) $x \in A_2$ のとき...

と, すべての $\alpha \in I$ に対して α を止めるたびに場合分けを議論することと同じである. (ii) の場合に, $x \in A_1$ から $x \in A_1 \cap A_2$ と結論づけることは (ii)–(2) の組み合わせのときにしかできない. (ii)–(1) の組み合わせのときには $x \in A_1 \cap A_2$ と結論づけることはできない.

問 3 (3) の別解 この問題の並びの場合だけ次の別解が考えられる. 「(1) より B として全体集合 X を選ぶと, (3) が成立. 」