

## 微積分及び演習I・自習シート

問1  $A, B, C$  を集合とする. 次を証明せよ.

(1)  $A \subset B$  ならば  $A \cup C \subset B \cup C$

証明  $x \in A \cup C$  とする. 和集合の定義より  $x \in A$  または  $x \in C$ .

(i)  $x \in A$  のとき, 仮定より  $x \in B$  である. よって  $x \in B$ , つまり  $x \in B \cup C$  である.

(ii)  $x \in C$  のとき,  $x \in B \cup C$  である.

(i), (ii) より  $x \in B \cup C$ . ゆえに  $A \cup C \subset B \cup C$  が成立する.  $\square$

(2)  $A \subset B$  ならば  $A \cap C \subset B \cap C$

証明  $x \in A \cap C$  とする. 共通部分の定義より  $x \in A$  かつ  $x \in C$ . 仮定より  $x \in B$  かつ  $x \in C$  と言える. つまり共通部分の定義より  $x \in B \cap C$ . ゆえに  $A \cap C \subset B \cap C$  が成立する.  $\square$

(3)  $A \subset C$  かつ  $B \subset C$  ならば  $A \cup B \subset C$

証明  $x \in A \cup B$  とする. 和集合の定義より  $x \in A$  または  $x \in B$ .

(i)  $x \in A$  のとき, 仮定  $A \subset C$  より  $x \in C$ .

(ii)  $x \in B$  のとき, 仮定  $B \subset C$  より  $x \in C$ .

(i), (ii) より  $x \in C$ . ゆえに  $A \cup B \subset C$  が成立する.  $\square$

(4)  $A \cup B = A$  ならば  $B \subset A$

証明  $x \in B$  とする. このとき和集合の定義より  $x \in A \cup B$ . 仮定より  $x \in A$ . ゆえに  $B \subset A$  が成立する.  $\square$

(5)  $A \cap B = A$  ならば  $A \subset B$

証明  $x \in A$  とする. このとき仮定より  $x \in A \cap B$ . 共通部分の定義より  $x \in A$  かつ  $x \in B$ . つまり  $x \in B$ . ゆえに  $A \subset B$  が成立する.  $\square$

問2  $A, B$  を集合とする. 次を証明せよ.

$$(A \cup B) \cap A = A$$

証明 (c) を示す.  $x \in (A \cup B) \cap A$  とする. 共通部分の定義より  $x \in A \cup B$  かつ  $x \in A$ .  
よって  $x \in A$ . ゆえに

$$(A \cup B) \cap A \subset A$$

が成立する.

(c) を示す.  $x \in A$  とする. 和集合の定義より  $x \in A$  かつ  $x \in A \cup B$  と言える. よって, 共通部分の定義より  $x \in (A \cup B) \cap A$ . ゆえに

$$(A \cup B) \cap A \supset A$$

が成立する.

以上より等号が成立する.

□

問3  $A, B, C$  を集合とする. 次を証明せよ.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

解答例 (c) を示す.  $x \in A \cup (B \cap C)$  とする. 和集合の定義より  $x \in A$  または  $x \in B \cap C$ .

(i)  $x \in A$  のとき,  $x \in A \cup B$  かつ  $x \in A \cup C$  と言える<sup>1)</sup>. よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii)  $x \in B \cap C$  のとき, 共通部分の定義より  $x \in B$  かつ  $x \in C$ , すなわち  $x \in A \cup B$  かつ  $x \in A \cup C$  と言える. よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i), (ii) より  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する.

(c) を示す.  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  とする. 共通部分の定義より  $x \in A \cup B$  かつ  $x \in A \cup C$  と言える.

(i)  $x \in A$  のとき,  $x \in A \cup (B \cap C)$  と言える. よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(ii)  $x \notin A$  のとき<sup>2)</sup>,  $x \in A \cup B$  かつ  $x \in A \cup C$  より  $x \in B$  かつ  $x \in C$  が成立する<sup>3)</sup>. 共通部分の定義より  $x \in B \cap C$  が成立するので, よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

---

<sup>1)</sup>  $x \in A$  ならば  $x \in A \cup B$  であるし, かつ  $x \in A \cup C$  である. 「明日は雨が降る」ならば「明日は雨が降る, またはヤリが降る」という天気予報は正しい.

<sup>2)</sup> ( $x \in A$  または  $x \in B$ ) かつ ( $x \in A$  または  $x \in C$ ) という推論から,

(i)  $x \in A$  かつ  $x \in A$  のとき

(ii)  $x \in B$  かつ  $x \in A$  のとき

(iii)  $x \in A$  かつ  $x \in C$  のとき

(iv)  $x \in B$  かつ  $x \in C$  のとき

と場合分けしても間違いではない. しかしこのような場合分けの方法はこの先役に立たなくなるので, 解答例のように  $x \in A$  か  $x \notin A$  の場合分けをお勧めする.

<sup>3)</sup> 実際, そうでないなら  $x \notin B$  または  $x \notin C$  となるが,  $x \notin A$  なので  $x \notin A \cup B$  または  $x \notin A \cup C$  となり矛盾するから)

(i), (ii) より  $x \in A \cup (B \cap C)$  が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する.

以上より等号が成立する.

□

問 4 次の否定を述べよ.

(例) 「彼はすべての都道府県を旅した.」

否定 「ある都道府県があって, 彼はその都道府県を旅していない.」

「全ての都道府県を旅していない.」は言い過ぎ.

(1) 「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えた.」

否定 「どの年も数理の人数は 100 人を超えていない.」

「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えていない.」では足りない.

(2) 「ある講義があって, その講義は龍大のすべての学生が受講している.」

否定 「どのような講義に対しても, ある龍大生がいて, その講義を受講していない.」

(3) 「微積分及び演習 I を受講しているすべての学生に対してある B リーグのチームがあって, その学生はそのチームが好きだ.」

否定 「微積分及び演習 I を受講しているある学生がいて, どの B リーグのチームもその学生は好きではない.」