**2025/07/10/No.13**

# 微積分及び演習 I・自習シート

**問 1** 次の関数 $f$ の 1 階導関数 $f'$, 2 階導関数 $f''$ と $n$ 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \times (-x)' \\ &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(e^{-x} \times (-x)') \\ &= e^{-x}, \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -e^{-x},$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}.$$

(2) $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2^3} \cdot 3(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\Big(3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)\Big)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad ({}^\forall n \geq 2).$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2} \times (1-x)' \\ &= (1-x)^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(1-x)^{-3} \times (1-x)' \\ &= 2(1-x)^{-3}, \end{aligned}$$

---

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-4} \times (1-x)' \\
&= 2 \cdot 3(1-x)^{-4},
\end{aligned}
$$

よりこれを一般化して

$$
f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}.
$$

(4) $f(x) = \log(1+x)$

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \Big(= (1+x)^{-1}\Big),
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -1(1+x)^{-2} \\
&= -(1+x)^{-2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= -(-2)(1+x)^{-3} \\
&= 2(1+x)^{-3},
\end{aligned}
$$

よりこれを一般化して

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}.
$$

**問 2** [広義積分] $y = \dfrac{1}{x^2}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $M > 1$ とすると

$$
\int_1^M \frac{1}{x^2} dx
$$

を求めよ.

**解答例**

$$
\begin{aligned}
\int_1^M \frac{1}{x^2} dx &= [-x^{-1}]_{x=1}^{x=M} \\
&= -\frac{1}{M} - (-1) \\
&= 1 - \frac{1}{M}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx := \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx
$$

と定義する (広義積分).

$$
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx
$$

を求めよ.

**解答例**　(1) より

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx &:= \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{M\to+\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(3) 積分区間が $[a,+\infty)$ の場合, $[a,M]$ の積分値が $M\to+\infty$ に対して収束する場合, その極限値で定義することにする. 次の値を求めよ.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx,\quad \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

**解答例**

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{1}{x^3}dx &= \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{x=1}^{x=M} \\ &= -\frac{1}{2M^2}-\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2M^2}.\end{aligned}$$

よって

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{x^3}dx = \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2M^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-3x}dx &= \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{x=0}^{x=M} \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3M}-\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3M}.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-3x}dx = \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3M}\right)=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx &= \left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_{x=0}^{x=M} \\ &= \mathrm{Tan}^{-1}M-\mathrm{Tan}^{-1}0 \\ &= \mathrm{Tan}^{-1}M.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\mathrm{Tan}^{-1}M=\frac{\pi}{2}.$$

**問 3**

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx$$

とおく (ただし $n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' \ dx$$

から部分積分の公式を用いて $n \geq 2$ に対する次の公式を証明せよ. [1)]

$$I_n := \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

**解答例**　$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' \ dx \\ &= \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x)'(-\cos x) \ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) \ dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \ dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx \\ I_n &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

よって,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

(i) $n$ が偶数のとき, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \vdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

---

[1)] 部分積分で $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる漸化式をまずは求める.

(ii) $n$ が奇数のとき, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ より

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&= \vdots \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$