微積分及び演習I・自習シート

問 1

定義　微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数といい

$$\int f(x)dx$$

とかく. 一般に $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると, 定数 C を加えた関数も $f(x)$ の原始関数となり

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

とかける.

次の原始関数を定数 C を付けて求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x}\ dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[5]{x}\ dx &= \int x^{\frac{1}{5}}\ dx \\ &= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C \quad (\text{以下}, C\text{ は定数})\end{aligned}$$

置換積分　$g = g(x)$ とおくとき, g が C^1 級ならば

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

実際, $f(g)$ の原始関数の一つを $F(g)$ とおくと, $F'(g) = f(g)$ で, $F(g(x))$ を x について微分すれば, 合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= \frac{dF}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x) \\ &= f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

よって,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx = F(g(x)) = F(g) = \int f(g)dg$$

これは高校生のときに学習したように,

$$dg = g'(x)dx$$

と形式的に変形して

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

によって計算できることを示している.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \ dx$

$g = \sin x$ とおくと, $g' = dg/dx = \cos x$ で ($dg = \cos x dx$ で)

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x \ dx &= \int g^3 \frac{dg}{dx} dx \\ &= \int g^3 dg \\ &= \frac{1}{4} g^4 + C \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + C\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1} \ dx$

$g = x^2+1$ とおくと, $g' = dg/dx = 2x$ で ($dg = 2xdx$ で)

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1} \ dx &= \int \sqrt{g} \ \frac{dg}{dx} dx \\ &= \int g^{\frac{1}{2}} dg \\ &= \frac{2}{3} g^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} \ dx$

$g = 1+x^2$ とおくと, $g' = dg/dx = 2x$ で ($dg = 2xdx$ で)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \ dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{g} \ \frac{dg}{dx} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{g} dg \\ &= \frac{1}{2}\log|g| + C \\ &= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\end{aligned}$$

部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

実際, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ より

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \int \{f(x)g(x)\}' dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx - \int f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

よって,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(5) $\int x^2 e^{2x} dx$

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{2x}\ dx &= \int x^2 (\frac{1}{2}e^{2x})' dx \\
&= x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int (x^2)' \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
&= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx \\
&= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x (\frac{1}{2} e^{2x})' dx \\
&= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left\{ x \frac{e^{2x}}{2} - \int (x)' \frac{1}{2} e^{2x} dx \right\} \\
&= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
&= \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1)
\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \tan x \ dx$

$g = \cos x$ とおくと, $g' = dg/dx = -\sin x$ で

$$\begin{aligned}\int \tan x \ dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{-1}{\cos x}(-\sin x) dx \\ &= \int \frac{-1}{g}\frac{dg}{dx} dx \\ &= -\int \frac{1}{g} dg \\ &= -\log|g| + C \\ &= -\log|\cos x| + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C}$$

(7) $\displaystyle\int \log x \ dx$

$$\begin{aligned}\int \log x \ dx &= \int (x)' \log x \ dx \\ &= x\log x - \int x(\log x)' dx \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x} dx \\ &= x\log x - \int dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1} x \ dx$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Tan}^{-1} x \ dx &= \int (x)' \mathrm{Tan}^{-1} x \ dx \\ &= x\mathrm{Tan}^{-1} x - \int x(\mathrm{Tan}^{-1} x)' dx \\ &= x\mathrm{Tan}^{-1} x - \int x\frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x\mathrm{Tan}^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\end{aligned}$$

ここで, 第 2 項には (4) の計算結果を用いている.

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} \ dx$

部分分数分解より $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{(1+x)(1-x)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+x}+\dfrac{\frac{1}{2}}{1-x}$ なので

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1-x^2}dx &= \int\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx\\ &= \frac{1}{2}\log|1+x|-\frac{1}{2}\log|1-x|+C\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\end{aligned}$$

問 2 [2 次式と分数型の積分] 以下の積分公式を用いると次の 4 つのグループの積分が計算できる:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\log(x+\sqrt{1+x^2})+C \quad \left(=\mathrm{Sinh}^{-1}x+C\right),$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\mathrm{Sin}^{-1}x+C,$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\mathrm{Tan}^{-1}x+C,$$

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C \quad \left(=\mathrm{Tanh}^{-1}x+C\right)$$

例題

$$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$$

は分母の 2 次関数 $-x^2+4x$ が

$$\begin{aligned}-x^2+4x &= -(x^2-4x+4)+4\\ &= -(x-2)^2+4\end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X=\dfrac{x-2}{2}$ とおくと (全体を 4 で割ることを見据えて)

$$\begin{aligned}-x^2+4x &= -(x^2-4x+4)+4\\ &= -(x-2)^2+4\\ &= 4\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1\right)\\ &= 4(1-X^2)\end{aligned}$$

となり, $dX=\dfrac{1}{2}dx$ より $2dX=dx$ を用いて

$$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{4(1-X^2)}}\,2dX=\int\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX$$

ゆえに 2 番目の公式を用いれば

$$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX=\mathrm{Sin}^{-1}X+C=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$$

を得る.

例題を参考に次を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$

解答例　分母の 2 次関数 $-x^2+4x-3$ が

$$\begin{aligned} -x^2+4x-3 &= -(x^2-4x+4)+4-3 \\ &= -(x-2)^2+1 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X=x-2$ とおくと

$$\begin{aligned} -x^2+4x-3 &= -(x^2-4x+4)+4-3 \\ &= -(x-2)^2+1 \\ &= 1-X^2 \end{aligned}$$

となり, $dX=dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX$$

ゆえに 2 番目の公式を用いれば

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX = \mathrm{Sin}^{-1}X+C = \mathrm{Sin}^{-1}(x-2)+C$$

を得る.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

解答例　分母の 2 次関数 x^2+2x+2 が

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &= (x^2+2x+1)-1+2 \\ &= (x+1)^2+1 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X=x+1$ とおくと

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &= (x^2+2x+1)-1+2 \\ &= (x+1)^2+1 \\ &= 1+X^2 \end{aligned}$$

となり, $dX=dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}\,dX$$

ゆえに 1 番目の公式を用いれば

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}\,dX &= \log(X+\sqrt{1+X^2})+C \\ &= \log(x+1+\sqrt{1+(x+1)^2})+C \\ &= \log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C \end{aligned}$$

を得る．なお, $\sinh x$ はハイパボリックサインと呼ばれ

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義される関数である．その逆関数が

$$\mathrm{Sinh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

である．

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13}\, dx$

解答例　分母の 2 次関数 $x^2 - 6x + 13$ が

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 13 \\ &= (x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X = \dfrac{x-3}{2}$ とおくと (全体を 4 で割ることを見据えて)

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 13 \\ &= (x-3)^2 + 4 \\ &= 4\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right) \\ &= 4(1 + X^2) \end{aligned}$$

となり, $dX = \dfrac{1}{2}dx$ より $2dX = dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13}\, dx = \int \frac{1}{4(1+X^2)}\, 2dX = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+X^2}\, dX$$

ゆえに 3 番目の公式を用いれば

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 13}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+X^2}\, dX &= \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1} X + C \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

を得る．

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{-4x^2 + 8x - 3}\, dx$

解答例　分母の 2 次関数 $-4x^2 + 8x - 3$ が

$$\begin{aligned} -4x^2 + 8x - 3 &= -4(x^2 - 2x + 1) + 4 - 3 \\ &= -4(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X = 2(x-1)$ とおくと

$$\begin{aligned} -4x^2 + 8x - 3 &= -4(x^2 - 2x + 1) + 4 - 3 \\ &= -4(x-1)^2 + 1 \\ &= 1 - X^2 \end{aligned}$$

となり, $dX = 2dx$ より $\frac{1}{2}dX = dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{-4x^2+8x-3}\,dx = \int \frac{1}{1-X^2}\,\frac{1}{2}dX$$

ゆえに 4 番目の公式を用いれば

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{-4x^2+8x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-X^2}\,dX &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+X}{1-X}\right| + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+2(x-1)}{1-2(x-1)}\right| + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{-2x+3}\right| + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x-3}\right| + C\end{aligned}$$

を得る. なお, $\tanh x$ はハイパボリックタンジェントと呼ばれ

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

で定義される関数である. また, $\cosh x$ はハイパボリックコサインと呼ばれ

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で定義される関数である. その逆関数が

$$\mathrm{Tanh}^{-1} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

である.

発展　一般に $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, $C' = 0$ より $F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数となる. しかし $f(x)$ の原始関数が $F(x)+C$ で全て網羅されているかどうかはまだ分からない. $y = \cos x$ の原始関数は $y = \sin x + C$ だけだろうか. $y = \sin x + C$ とは全く異なる, まだ我々の知らない何か別の関数があって, 微分したら $y = \cos x$ になるかもしれない.

しかしそのようなことはなく, $f(x)$ の原始関数どうしの違いは定数だけであることを示していく.

$F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の任意の原始関数とする. このとき F_1 と F_2 の差は高々定数である[1]ことを示せ. ただし, 関数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して ${}^\forall x \in [a,b], g'(x) = 0$ ならば g は定数関数であることを用いてもよい.

証明　$F_1 - F_2$ が定数関数であることを示す. 原始関数の定義より

$${}^\forall x \in [a,b], \quad F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x)$$

であるので

$$\{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

[1] 違いがあってもその差は定数という意味.

よって関数 $F_1 - F_2$ は定数関数である, すなわち $^\exists C \in \mathbb{R}$ s.t.

$$^\forall x \in [a,b], \quad F_1(x) - F_2(x) = C,$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

つまり F_1 と F_2 の差は高々定数である. $\square$

これにより先の問題は解決される. すなわち $y = \cos x$ の原始関数の 1 つが $y = \sin x$ である以上, 他の原始関数は形は違うかもしれないが本質的には $y = \sin x + C$ だけである. つまり, もし何か謎の関数 $y = Y(x)$ を微分すると, $Y'(x) = \cos x$ となったならば, $y = Y(x)$ の表現がどのようになっているかに関わらず, それは $Y(x) = \sin x + C$ とかけることが証明された.