微積分及び演習 I・自習シート

問 1 逆関数の微分法を用いて次の関数を微分せよ.

(1) $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$

(2) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$

(3) $y = x^{1/n}$ (ただし, $n \in \mathbb{N}$)

解答

(1) 逆関数の定義より $x = \cos y$ $(0 \leq y \leq \pi)$. よって $dy/dx < 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \sin y \\ &= -\sqrt{1-\cos^2 y} \\ &= -\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

(2) 逆関数の定義より $x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$. よって

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \\ &= 1 + \tan^2 y \\ &= 1 + x^2.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

(3) 逆関数の定義より $x = y^n$. よって

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= ny^{n-1} \\ &= n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1} \\ &= nx^{\frac{n-1}{n}}\end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

問 2 $f(x) = x^2$ は $x = 0$ で連続である. これを ε-δ 論法で示すと次のようになる:

> ${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta_\varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$
>
> $$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$
>
> を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする.

> $$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$
>
> となる x の範囲を先に見積もっておくと
>
> $$\begin{aligned}|f(x) - f(0)| &= |x^2 - 0| \\ &= x^2 \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$
>
> より, $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ であればよい.

$\delta_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon}$ とおくと, $x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ に対して, $x^2 < \varepsilon$ なので

$$\begin{aligned}|f(x) - f(0)| &= |x^2 - 0| \\ &= x^2 \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

よって成立. □

　この例を参考に $f(x) = 2x$ は $x = 1$ で連続であることを ε-δ 論法で示せ. また $f(x) = x^2$ は $x = 1$ で連続であることを ε-δ 論法で示せ.

解答例　${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta_\varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon$,

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

を示す. $\varepsilon > 0$ とする.

$$|f(x)-f(1)| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$$

となるような δ_ε を選べばよいので逆算すると

$$2|x-1| < 2\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$$

であればよい.

$\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ とおくと $\delta_\varepsilon > 0$ でさらに ${}^\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |f(x)-f(1)| &= |2x-2| \\ &= 2|x-1| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

よって, $f(x) = 2x$ は $x = 1$ で連続である.

${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon$,

$$|f(x)-f(1)| < \varepsilon$$

を示す. $\varepsilon > 0$ とする.

$$\begin{aligned} |f(x)-f(1)| &= |x^2-1| \\ &= |x-1||x+1| \\ &= |x-1||x-1+2| \\ &\leq |x-1|^2 + 2|x-1| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となるような δ_ε を選べばよいので逆算すると, $\delta_\varepsilon \leq 1$ を満たすように選べば $\delta_\varepsilon^2 \leq \delta_\varepsilon$ なので

$$|x-1|^2 + 2|x-1| < \delta_\varepsilon^2 + 2\delta_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon(1+2) \leq \varepsilon$$

であればよい.

$\delta_\varepsilon := \min\{1, \varepsilon/3\}$ とおくと $\delta_\varepsilon > 0$ でさらに ${}^\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-1| < \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |f(x)-f(1)| &= |x^2-1| \\ &= |x-1||x+1| \\ &= |x-1||x-1+2| \\ &\leq |x-1|^2 + 2|x-1| \\ &< \delta_\varepsilon^2 + 2\delta_\varepsilon \\ &\leq \delta_\varepsilon(1+2) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

よって, $f(x) = x^2$ は $x = 1$ で連続である.

別解　${}^\forall\varepsilon>0, {}^\exists\delta_\varepsilon>0$ s.t. ${}^\forall x\in\mathbb{R}$: $0<|x-1|<\delta_\varepsilon$,

$$|f(x)-f(1)|<\varepsilon$$

を示す. $\varepsilon>0$ とする.

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)| &= |x^2-1| \\ &= |x-1||x+1| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となるような δ_ε を選べばよいので逆算すると, $\delta_\varepsilon\le 1$ を満たすように選べば, そもそも, $0<|x-1|<\delta_\varepsilon$ ならば $|x|\le|x-1|+|1|\le\delta_\varepsilon+1\le 2$ より $|x+1|\le|x|+1\le 2+1=3$

$$|f(x)-f(1)|=|x^2-1|=|x-1||x+1|\le 3|x-1|<3\delta_\varepsilon\le\varepsilon$$

であればよい.

$\delta_\varepsilon:=\min\{1,\varepsilon/3\}$ とおくと $\delta_\varepsilon>0$ でさらに ${}^\forall x\in\mathbb{R}$: $0<|x-1|<\delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)| &= |x^2-1| \\ &= |x-1||x+1| \\ &\le 3|x-1| \\ &\le 3\delta_\varepsilon \\ &\le \varepsilon\end{aligned}$$

よって, $f(x)=x^2$ は $x=1$ で連続である.

問 3 次の関数の $x=0$ における連続性と微分可能性を調べよ.

(1)

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ -x & x<0\end{cases}$$

解答例　まず連続性を調べる.

$$|f(x)-f(0)|=|x|$$

よって, $x\to 0$ のとき $|f(x)-f(0)|\to 0$ (厳密には ε-N や ε-δ 論法で証明できる). よって, f は $x=0$ で連続.

次に微分可能性を調べる.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}.$$

ここで, $h>0$ とすると, $|h|/h=1$ より $h\to 0+0$ のとき,

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{h\to 0+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= 1.\end{aligned}$$

一方, $h<0$ とすると, $|h|/h=-1$ より $h\to 0-0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{h\to 0-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

よって変化の割合は極限値を持たない (右極限と左極限が一致しない) ので f は $x=0$ で微分可能でない.

(2)

$$
f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & x=0 \end{cases}
$$

解答例　まず連続性を調べる.

$$
|f(x)-f(0)| = \left|x^2\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x^2|
$$

よって, $x\to 0$ のとき $|f(x)-f(0)|\to 0$ (厳密には ε-N や ε-δ 論法で証明できる). よって, f は $x=0$ で連続.

次に微分可能性を調べる.

$$
\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2\sin\dfrac{1}{h}}{h} = h\sin\frac{1}{h}.
$$

ここで, $h\to 0$ のとき, $|h\sin\frac{1}{h}-0|\leq |h|\to 0$ より

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

よって f は $x=0$ で微分可能.