微積分及び演習I・自習シート

問 1 [高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $f(x) = \log(1+x^2)$

解答

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1+x^2) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(1+x^2) - x^3(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(4)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left((1+x^2)^{1/2}\right)' \\
&= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2x \\
&= -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{1+x^2} - x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{2x+2x^3-x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2x+x^3}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}2x \\
&= \frac{2x}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

問 2 次の値を求めよ.

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}(-1) = -\pi/2$

(2) $\mathrm{Sin}^{-1}(-1/2) = -\pi/6$

(3) $\mathrm{Sin}^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$

(4) $\mathrm{Cos}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$

(5) $\mathrm{Cos}^{-1}(0) = \pi/2$

(6) $\mathrm{Cos}^{-1}(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$

(7) $\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$

(8) $\mathrm{Tan}^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$

(9) $\mathrm{Tan}^{-1}(-1) = -\pi/4$

問 3 $a \in [0,1]$ とする. $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続ならば $f - g$ も連続であることを ε-δ 論法で示せ.

解答例

$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t. $^\forall x : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$

$$|(f(x) - g(x)) - (f(a) - g(a))| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. f, g は点 $x = a$ で連続なので, ε-δ 論法による定義より $^\exists \delta_f,\ \delta_g > 0$ s.t.

$$^\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_f, \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$^\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_g, \quad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ とおくと, $^\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (f(a) - g(a))| &= |f(x) - f(a) + g(a) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(a) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって成立. □

問 4 $a, c \in \mathbb{R}$ とする. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続ならば cf も点 $x = a$ で連続であることを ε-δ 論法で示せ.

解答例

$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t. $^\forall x : 0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$

$$|cf(x) - cf(a)| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. f は点 $x = a$ で連続なので, ε-δ 論法による定義より $^\exists \delta_\varepsilon$ s.t.

$$^\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon, \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{1 + |c|}.$$

よって, $^\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |cf(x) - cf(a)| &= |cf(x) - cf(a)| \\ &= |c||f(x) - f(a)| \\ &\leq (1 + |c|)|f(x) - f(a)| \\ &< (1 + |c|)\frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって成立. □

発展 $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $f : I \to \mathbb{R}$ とする.「f は I 上で連続である」とは任意の点 $a \in I$ で連続であることが定義なので,

$$\underline{{}^{\forall} a \in I}, {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta_{\varepsilon,a} > 0 \text{ s.t.}$$
$$ {}^{\forall}x \in I : 0 < |x-a| < \delta_{\varepsilon,a}, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が ε-δ 論法による厳密な定義となる. ここで, $\delta_{\varepsilon,a}$ は $\varepsilon > 0$ に依存するが, $a \in I$ **にも依存することに注意する. 言い換えると区間** I **上で連続の証明は点** $a \in I$ **ごとに確かめるため** $\delta_\varepsilon > 0$ **が点** a **にも依存しているということ.** この $\delta_{\varepsilon,a}$ が a に依存せずに選べるとき, すなわち

$${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t.}$$
$${}^{\forall}x \in I, {}^{\forall} a \in I : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

を満たすとき,「f は I 上で一様連続である」という. **「${}^{\forall}a \in I$」の位置に注意**. 次の問いに答えよ.

(1) $a \in I$ とする. $f(x) = 2x$ は点 $x = a$ において連続であることを証明せよ.

解答例　$\varepsilon > 0$ とする. $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ とおけば, ${}^{\forall}x \in I : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |2x - 2a| \\ &< 2\delta_\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は点 $x = a$ で連続. □

(2) $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続であることを証明せよ.

解答例　上記 (1) の $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ は $\varepsilon > 0$ のみに依存し $a \in \mathbb{R}$ に依存せず選べている. すなわち ${}^{\forall}x, a \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |2x - 2a| \\ &< 2\delta_\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

を満たすので, $f(x) = x$ は $\mathbb{R}$ において一様連続である. □

(3) $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続であることを証明せよ.

解答例　$\varepsilon > 0,\ a \in \mathbb{R}$ とする． $\delta_{\varepsilon,a} := \min\{1, \varepsilon/(1+2|a|)\}$ とおけば， $\delta_{\varepsilon,a} \leq 1$ より $^\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta_{\varepsilon,a}$

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(a)| &= |x^2 - a^2| \\
&= |x-a||x+a| \\
&\leq |x-a|(|x| + |a|) \\
&\leq |x-a|(|x-a| + |a| + |a|) \\
&< \delta_{\varepsilon,a}(\delta_{\varepsilon,a} + 2|a|) \\
&\leq \delta_{\varepsilon,a}(1 + 2|a|) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって $g(x)$ は点 $x = a$ で連続となり, $a \in \mathbb{R}$ の任意性から $g(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ において連続である. □

(4) $g(x) = x^2$ は $I := [0, 1]$ において一様連続であることを証明せよ.

解答例　$x, a \in I$ ならば $|x| \leq 1, |a| \leq 1$ であることに注意する． $\varepsilon > 0$ とする． $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ とおくと $^\forall x, a \in [0, 1] : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(a)| &= |x^2 - a^2| \\
&= |x-a||x+a| \\
&\leq |x-a|(|x| + |a|) \\
&\leq 2|x-a| \\
&< 2\delta_\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって $g(x) = x^2$ は $[0, 1]$ において一様連続である. □

(5) $g(x) = x^2$ は $I := [0, \infty)$ において一様連続でないことを証明せよ.

解答例　背理法で示す． $I := [0, \infty)$ において一様連続であると仮定する．定義より $^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t. $^\forall x, a \in [0, \infty) : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$

$$|g(x) - g(a)| = |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

特に $a \in I, x := a + \delta_\varepsilon/2$ とおくと $x \in I$ かつ $0 < |x-a| = \delta_\varepsilon/2 < \delta_\varepsilon$ を満たすので, やはり

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> |g(x) - g(a)| \\
&= \left| \left(a + \frac{\delta_\varepsilon}{2} \right)^2 - a^2 \right| \\
&= \left| \delta_\varepsilon a + \frac{\delta_\varepsilon^2}{4} \right| \\
&= \delta_\varepsilon \left(a + \frac{\delta_\varepsilon}{4} \right) \\
&> \delta_\varepsilon a
\end{aligned}$$

が成立することになる．しかし，δ_ε が a に依存しないので，これは

$$a < \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$$

が任意の $a \in [0, \infty)$ に対して成立することになる．つまり $I = [0, \infty)$ は上に有界を意味する．よって矛盾．すなわち，$g(x) = x^2$ は $[0, \infty)$ において一様連続でない． $\square$