微積分及び演習I・勉強会No.1

> 2限目は1限目の続きで会話しながらこの課題に取り組んでよいし, 1限目の小テスト対策の答え合わせや確認を行ってもよい. TAに教えてもらってもよい.

問1　$n = 1, 2$ とする. $A_n \subset \mathbb{R}$ が (1), (2) の様に定義されているとき,

$$A_1, \quad A_2, \quad A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2$$

が, どのような集合になるかそれぞれ元をすべて列挙する形で求めよ (求めるだけでよい).

(1) $A_n := \{1, 2, \cdots, 3n\}$

(2) $A_n := \{m \in \mathbb{N} : m$ は10以下の $n+1$ の倍数 $\}$

$n \in \mathbb{N}$ とする. $A_n \subset \mathbb{R}$ が (3) の様に定義されているとき,

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

が, どのような集合になるかそれぞれ求めよ (求めるだけでよい).

(3) $A_n := \{r \in \mathbb{R} : n - 1 \leq |r| \leq n\}$

解答例　(1) $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ でさらに,

$$A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A_1 \cap A_2 = \{1, 2, 3\}.$$

(2) $A_1 = \{m \in \mathbb{N} : m$ は10以下の2の倍数$\}$, $A_2 = \{m \in \mathbb{N} : m$ は10以下の3の倍数$\}$ となるので, 元をすべて列挙すると

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad A_2 = \{3, 6, 9\}.$$

さらに

$$A_1 \cup A_2 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 = \{6\}.$$

(3)

$$A_1 = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq |r| \leq 1\} = [-1, 1],$$
$$A_2 = \{r \in \mathbb{R} : 1 \leq |r| \leq 2\} = [-2, -1] \cup [1, 2],$$
$$A_2 = \{r \in \mathbb{R} : 2 \leq |r| \leq 3\} = [-3, -2] \cup [2, 3],$$

さらに

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R},$$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

問2　$n \in \mathbb{N}$ とし, $A_n := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ とおく. このとき次を証明せよ.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$. $\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right.$を$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$とかくこともある$\left.\right)$

(2) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$. $\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right.$を$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$とかくこともある$\left.\right)$

解答例 (1)

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$ かつ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \mathbb{N}$ を示せばよい.

($\subset$) を示す. $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする. 和集合の定義より ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \in A_N = \{m \in \mathbb{N} : m \leq N\}.$$

つまり $x \in \mathbb{N}$ かつ $x \leq N$. よって $x \in \mathbb{N}$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$ が成立.

($\supset$) を示す. $x \in \mathbb{N}$ とする.

$$x \leq x$$

なので, $x \in A_x$. よって $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \mathbb{N}$ が成立.
以上により等号が成立. □

別解 ($\supset$) を示す. $x \in \mathbb{N}$ とする. アルキメデスの原理より ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \leq N$$

なので, $x \in A_N$. よって $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \mathbb{N}$ が成立.

(2)

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ かつ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \{1\}$ を示せばよい.

($\subset$) を示す. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする. 共通部分の定義より

$${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \quad x \in A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}.$$

つまり $x \leq n$. これは x が $\mathbb{N}$ の最小値であることを意味するので $x = 1$. よって $x \in \{1\}$ が得られ, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ が成立.

($\supset$) を示す. $x \in \{1\}$, すなわち $x = 1$ とする. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$ より

$$x \in A_n.$$

よって, 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

が得られ, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \{1\}$ が成立.
以上により等号が成立. □

問 3 次の命題の否定を作れ. ただし, 問題中の集合 $E \subset \mathbb{R}$ や数列 $\{a_n\}$, 値などについては宣言をしていないが適宜判断せよ.

(1) ${}^{\forall}x \in E,\, x \le \alpha$.

(2) ${}^{\exists}M > 0$ s.t.

$$ {}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le M. $$

(3) ${}^{\forall}r \in \mathbb{R},\, {}^{\exists}N_r \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ r \le N_r. $$

(4) ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\, {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ {}^{\forall}n \ge N_\varepsilon, \quad |a_n - a| < \varepsilon. $$

(5) ${}^{\forall}k \in \mathbb{R},\, {}^{\exists}N_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ {}^{\forall}n \ge N_k, \quad a_n \ge k. $$

解答例

(1) ${}^{\exists}x_0 \in E$ s.t. $x_0 > \alpha$.

(2) ${}^{\forall}M > 0,\, {}^{\exists}n_M \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ |a_{n_M}| > M. $$

(3) ${}^{\exists}r_0 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$ {}^{\forall}N \in \mathbb{N}, \quad r_0 > N. $$

(4) ${}^{\exists}\varepsilon_0 > 0$ s.t. ${}^{\forall}N \in \mathbb{N},\, {}^{\exists}n_N \ge N$ s.t.

$$ |a_{n_N} - a| \ge \varepsilon_0. $$

(5) ${}^{\exists}k_0 \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall}N \in \mathbb{N},\, {}^{\exists}n_N \ge N$ s.t.

$$ a_{n_N} < k_0. $$

問 4　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．このとき

$$ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} $$

であることを “$\le$” と “$\ge$” の両方を示すことで証明せよ．

解答例　($\le$) を示す．$A \subset A \cup B$ より，

$$ \inf A \ge \inf(A \cup B). $$

同じく，$B \subset A \cup B$ より，

$$ \inf B \ge \inf(A \cup B). $$

ゆえに

$$ \inf(A \cup B) \le \min\{\inf A, \inf B\} $$

を得る．

($\ge$) を示す．$\alpha := \inf A$, $\beta := \inf B$ とおく．inf の定義より，

$$ {}^{\forall}x \in A, \quad x \ge \alpha \ge \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\}, $$

$$ {}^{\forall}y \in B, \quad y \ge \beta \ge \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\}. $$

よって，$z \in A \cup B$ とすると，和集合の定義より $z \in A$ または $z \in B$ である．

(i) $z \in A$ のとき, $z \geq \alpha \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.

(ii) $z \in B$ のとき, $z \geq \beta \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.

ゆえに, $\min\{\inf A, \inf B\}$ は $A \cup B$ の下界の 1 つである. $\inf(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最大下界なので,

$$\inf(A \cup B) \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

以上より等号が成立する. □

問 5 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を数列, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ ならば

$$a_n - b_n \to \alpha - \beta$$

であることを ε-N 論法で証明せよ.

解答例

> ${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
>
> $$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| < \varepsilon$$
>
> を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. 仮定より, ${}^\exists N_\alpha$, $N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$^\forall n \geq N_\beta, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そこで, $N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおくと

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって,

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| &= |a_n - \alpha + \beta - b_n| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |\beta - b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により成立. □

問 6 次の数列の収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{3n}$ に対して $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(2) $b_n := \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}$ に対して $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(3) $c_n := \dfrac{1}{n} \sin n$ に対して $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

解答例　(1)

$^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{3n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい．そこで先に

$$\left|\frac{1}{3n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $1/3n < 1/n$ より

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{3n} - 0\right| &= \frac{1}{3n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい．

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理により $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{3n} - 0\right| &= \frac{1}{3n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(2)

$^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい．そこで先に

$$\left|\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 0\right| &= \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい．

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理により $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{8}{\varepsilon^3} < N_\varepsilon$$

このとき,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{N_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 0\right| &= \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \\ &< \frac{2}{\sqrt[3]{N_\varepsilon}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$b_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

(3)

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい．そこで先に

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $|\sin n| \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理により $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &< \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

以上により

$$c_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

発展 (限りなくルートが続く数列) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ と定義され, 一般項

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

なる数列を考える. [1] 以下の問に答えよ.

(1) 数学的帰納法を用いて

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq 2$$

であることを示せ.

[1] $n \in \mathbb{N}$ を止めるたびに a_n は n 重根号であり実数（正の実数）であるので, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列である.

解答例
(a) $n=1$ のとき, $a_1=\sqrt{2}\leq 2$. よって成立.
(b) $n=k$ のとき, $a_k\leq 2$ と仮定する. $n=k+1$ のとき, $a_{k+1}\leq 2$ を示す. 数列の定義より

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\leq\sqrt{2+2}=2$$

よって $n=k+1$ のときにも $a_{k+1}\leq 2$ が成立.

以上により数学的帰納法から

$$^{\forall}n\in\mathbb{N},\quad a_n\leq 2$$

である. □

(2) 数学的帰納法を用いて $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ.

解答例 $^{\forall}n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq a_{n+1}$ を示す.
(a) $n=1$ のとき, $a_1=\sqrt{2}\leq 2$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ より,

$$a_1=\sqrt{2}\leq\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2.$$

[2] よって成立.
(b) $n=k$ のとき, $a_k\leq a_{k+1}$ と仮定する. $n=k+1$ のとき, $a_{k+1}\leq a_{k+2}$ を示す.

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\leq\sqrt{2+a_{k+1}}=a_{k+2}.$$

[3] よって $n=k+1$ のときにも成立.

以上により数学的帰納法から

$$^{\forall}n\in\mathbb{N},\quad a_n\leq a_{n+1}$$

であり, つまり $\{a_n\}$ は単調増加である. □

---

[2] $a_1=\sqrt{2}$ と $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ の大小比較は

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\\
&= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{2+\sqrt{2}-2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

でもよい.

[3] $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}$ と $a_{k+2}=\sqrt{2+a_{k+1}}$ の大小比較は

$$\begin{aligned}
a_{k+2}-a_{k+1} &= \sqrt{2+a_{k+1}}-\sqrt{2+a_k}\\
&= \sqrt{2+a_{k+1}}-\sqrt{2+a_k}\times\frac{\sqrt{2+a_{k+1}}+\sqrt{2+a_k}}{\sqrt{2+a_{k+1}}+\sqrt{2+a_k}}\\
&= \frac{2+a_{k+1}-(2+a_k)}{\sqrt{2+a_{k+1}}+\sqrt{2+a_k}}\\
&= \frac{a_{k+1}-a_k}{\sqrt{2+a_{k+1}}+\sqrt{2+a_k}}\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

でもよい.

(3) $\{a_n\}$ は収束することを示せ.

解答例　(1) から $\{a_n\}$ は上に有界である. さらに, $\{a_n\}$ は単調増加な数列である. よって, 上に有界で単調増加な数列は収束するので $\{a_n\}$ は収束する. $\square$