

令和5年度 位相入門I 小テスト対策勉強会 No.2

_____ 課程 _____ 年生 学籍番号 _____ 名前 _____

5 次関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について、「全射」、「単射」、「全単射」、「いずれでもない」かを判断し、最も適切なものを選び答えよ。（「全単射」な関数を「全射」と答えた場合には不正解という意味。つまり「全射」は「全射ではあるが単射ではない」という意味で用いること。）

- (1) $f(x) = x^2$.
- (2) $f(x) = x(x-1)(x+1)$.
- (3) $f(x) = x^3$.
- (4) $f(x) = \sin x$, (ただし、定義域は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

7 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε - N 論法で証明せよ.

- (1) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (2) $a_n := \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$

6 $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を論理記号で書け.

- (1) $\exists K \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall x \in E, x \leq K$.
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - a| < \varepsilon$.

8 $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (L^∞ 距離). 次の問いに答えよ.

(1) $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

(2) d_∞ は \mathbb{R}^2 の距離であることを示せ.