2024/07/18

位相入門II

目 次

第2章　開集合・閉集合

この講義のタイトルにもなっている「位相」もしくは「位相空間」とは大雑把にいえば「開集合」に関する概念といえるかもしれない. これは数直線における

$$[a, b] \text{ と } (a, b)$$

や平面における

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ と } \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

の違いといえる. 前者は集合の縁が閉じているといえるし, 後者は集合の縁が開いているといえる. 直線や円のように簡単な場合のみならずもっと一般的な集合に対して、この「縁が閉じている」「縁が開いている」を議論していくのが目的である.

次の数列 a_n を考えよう.

$$a_1 = 0.9, \quad a_2 = 0.99, \quad a_3 = 0.999, \quad a_4 = 0.9999, \ldots$$

これを循環小数 $0.\dot{9}$ の少数第 n 位までを表す数列だとすると, この数列の極限, つまり循環小数 $0.\dot{9}$ の値は 1 である.

$$0.\dot{9} := \lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

a_n は分数で表現できるので有理数であり, その極限 1 ももちろん有理数である. 一方, 次の数列 b_n を考えよう.

$$b_1 = 1.4, \quad b_2 = 1.41, \quad b_3 = 1.414, \quad b_4 = 1.4142, \ldots$$

これは無理数 $\sqrt{2}$ の少数第 n 位までを表す数列だとすると, この数列の極限は $\sqrt{2}$ である.

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \sqrt{2}.$$

b_n は分数で表現できるので有理数であるが, その極限 $\sqrt{2}$ は, もはや有理数ではなく無理数である. このようにある集合 (ここでは有理数) の縁 (ここでは極限値) が再び同じ仲間であるか否かは場合によって異なる. これから議論していく「開集合」や「閉集合」の概念は対象となる集合 (の縁) が閉じているか開いているかを議論するための基本的な概念となる.

定義 2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

$$(a, b), \quad [a, b], \quad (a, b], \quad [a, b)$$

で表される集合を区間とよぶ. 特に (a, b) を開区間, $[a, b]$ を閉区間とよぶ.

$\varepsilon > 0$ とする. 開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ を次のように一般化する. d を $\mathbb{R}^2$ の距離とする.

定義 2.2. $a \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 次の集合

$$N(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,a) < \varepsilon\}$$

を, 点 a の ε-近傍 (ε-neighborhood) という. テキストによっては $N(a;\varepsilon)$ の代わりに $B(a;\varepsilon)$ と表記することもある (ε-ball).

$N(a;\varepsilon)$ とは, 点 a を中心とする半径 ε の円盤 (ただし境界を含まない円盤) のことであるといえそうだが, ここで注意が必要である. d を通常の L^2 距離

$$d_2(x,a) := \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2}$$

で採用すれば, 例えば $N(a;\varepsilon)$ はまさに半径 ε の円盤である. しかし, d を次の d_1(L^1 距離)

$$d_1(x,a) := |x_1-a_1| + |x_2-a_2|$$

で採用すると, 以下のような領域となる: 同様に d を次の d_∞(L^∞ 距離)

$$d_\infty(x,a) := \max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\}$$

で採用するとどのような領域となるだろうか.

すなわち円や球といってもその形は距離の取り方によって異なる (円の定義).

この ε-近傍を用いて開集合というものを次のように定義する:

定義 2.3. $U \subset \mathbb{R}^2$ とする. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を満たすとき, U のことを $\mathbb{R}^2$ の開集合とよぶ.

この定義で果たして「縁が開いている」集合を表現できているのだろうか. 以後, $\mathbb{R}^2$ の距離を $d = d_2$, つまり

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

で議論を進める.

性質 2.4. 第一象限 $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

証明　$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とおく. U が開集合の定義を満たすことを示す. つまり

> ${}^{\forall}x \in U,\ {}^{\exists}\varepsilon_x > 0$ s.t.
> $$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$
> を示す.

$x = (x_1, x_2) \in U$ とする.

$$\varepsilon_x := \min\{x_1, x_2\}$$

とおく. つまり, 点 x と x-軸, y-軸までの距離で小さい方とする. このとき

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 実際, $y = (y_1, y_2) \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると, ε-近傍の定義から

$$d(y, x) < \varepsilon_x.$$

さらに min の定義から

$$\varepsilon_x \leq x_1, \quad \varepsilon_x \leq x_2$$

であるので,

$$x_1 - y_1 \leq |y_1 - x_1| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_1,$$
$$-y_1 < 0,$$

よって $y_1 > 0$. 同様に

$$x_2 - y_2 \leq |y_2 - x_2| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_2,$$

$$-y_2 < 0,$$

よって $y_2 > 0$. つまり $(y_1, y_2) \in U$. 以上より開集合の定義を満たす.

$N(x; \varepsilon_x) \subset U$ で縁が気になる人へ　$x = (x_1, x_2) \in U$ とする.

$$\varepsilon_x := \frac{1}{2} \min\{x_1, x_2\}$$

とおく. つまり, 点 x と x-軸, y-軸までの距離で小さい方**の半分**とする. このとき

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 実際, $y = (y_1, y_2) \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義から

$$d(y, x) < \varepsilon_x.$$

さらに min の定義から

$$\varepsilon_x \le x_1, \quad \varepsilon_x \le x_2$$

であるので,

$$x_1 - y_1 \le |y_1 - x_1| \le d(y, x) < \varepsilon_x \le \frac{1}{2}x_1 < x_1,$$
$$-y_1 < 0,$$

よって $y_1 > 0$. 同様に $y_2 > 0$. つまり $(y_1, y_2) \in U$. 以上より開集合の定義を満たす.　□

d の選び方によらずいつでもいえるの?　d として離散距離をえらんでみる.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \ne y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

この場合, 点 x の ε-近傍は

$$N(x; \varepsilon) := \begin{cases} \{x\} & (\varepsilon \le 1), \\ \mathbb{R}^2 & (\varepsilon > 1) \end{cases}$$

と, とても極端なものになることに注意が必要である.

$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とおく. U が開集合の定義を満たすことを示す. つまり

> ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.
> $$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$
> を示す.

$x = (x_1, x_2) \in U$ とする. この場合には半径を $\varepsilon_x \le 1$ であればどのようなものでもよいので, 例えば $\varepsilon_x := 1/2$ とおく. このとき $x \in U$ より

$$N(x; \varepsilon_x) = \{x\} \subset U$$

である. 以上より開集合の定義を満たす.　□

つまり, 第一象限 U が開集合であることに変わりは無いが, 距離 d を変えてしまうと, 半径の選び方はそれに応じて変えねばならないので, 一般にどのような距離でも同じ半径の取り方ですべてがうまくいくとは限らない.

問　次の集合は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ. ただし $a \in \mathbb{R}^2$.

(1) $\mathbb{R}^2$

(2) $N(a; 1)$

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$

解答例

(1) $\mathbb{R}^2$
$U := \mathbb{R}^2$ とおく. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示す. $x \in U$ とする. 実は $\varepsilon_x > 0$ としてどのような半径を選んでも $N(x; \varepsilon_x) \subset U$ となる. 例として $\varepsilon_x := 1$ とすると,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U (= \mathbb{R}^2)$$

である (実際 $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると定義から $y \in \mathbb{R}^2$ である). 以上より開集合の定義を満たす. □

(2) $U := N(a; 1)$ とおく. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := 1 - d(x, a)$ とおくと, $x \in U = N(a; 1)$ より

$$d(x, a) < 1$$

なので, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U \ (= N(a; 1))$$

を示す. $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

以上より

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon_x + d(x, a) = 1$$

よって $y \in U = N(a, 1)$. 以上より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

がいえたので, 開集合の定義を満たす. □

(3) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ とおく. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := d(x, a)$ とおくと, $x \in U$ より $x \neq a$ なので, 距離の定義より

$$d(x, a) > 0$$

つまり, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U \ (= \mathbb{R}^2 \setminus \{a\})$$

を示す. $y \in N(x;\varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義より

$$d(y,x) < \varepsilon_x$$

以上より

$$d(x,y) < \varepsilon_x = d(x,a).$$

よって $y \neq a$ なので $y \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$. 以上より

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

がいえたので, 開集合の定義を満たす. □

注　(2) では半径 1 の近傍を考えたが 1 は本質ではない. すなわちどのような半径 $\varepsilon > 0$ であっても $N(a;\varepsilon)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合となる.

定理 2.5. (1) U_λ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする, ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合. このとき

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.
(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

証明　(1) $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき和集合の定義から ${}^\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t.

$$x \in U_{\lambda_0}.$$

この選ばれた U_{λ_0} も開集合なので, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U_{\lambda_0}.$$

さらに

$$U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = U$$

であるので開集合の定義を満たす. $\square$

(2) $U := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ とおく. ${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき共通部分の定義より ${}^\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して,

$$x \in U_k.$$

U_k はすべて開集合なので, $\varepsilon_k > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_k) \subset U_k.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ でさらに

$$N(x;\varepsilon_x) \subset N(x;\varepsilon_k)$$

が成立する. よって

$$N(x;\varepsilon_x) \subset N(x;\varepsilon_k) \subset U_k.$$

すべての $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対してこれが成立しているので共通部分の定義から

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U.$$

開集合の定義を満たす. $\square$

定義 2.6. $F \subset \mathbb{R}^2$ とする. $F^c := \mathbb{R}^2 \setminus F$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合であるとき F のことを $\mathbb{R}^2$ の閉集合とよぶ.

問 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. a の 1 点からなる集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

解答例 $F := \{a\}$ とおくと $F^c = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. よって先の問いより F^c は開集合なので F は閉集合となる.

定理 2.7. (1) F_λ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする, ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合. このとき

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合となる.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, F_1, F_2, $\ldots$, F_n を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする. このとき

$$F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合となる.

解答例　(1) $F := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ とおく．ド・モルガンの法則より

$$F^c = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$$

で, F_λ^c はすべて開集合なので定理 4.5 の (1) より F^c は開集合となる．よって F は閉集合. □

(2) $F := F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ とおく．ド・モルガンの法則より

$$F^c = \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} F_k^c$$

で, F_k^c はすべて開集合なので定理 4.5 の (2) より F^c は開集合となる．よって F は閉集合.

注:　定理 4.5 の (1) は非加算和集合について閉じている一方, (2) は有限共通部分についてのみ言及している．実際, 開集合の可算共通部分は必ずしも開集合にはならない．例えば $\mathbb{R}$ において $U_n := (0, 1 + 1/n)$ とおくと, U_n は開集合であるが

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = (0, 1]$$

となり, 可算共通部分は開集合ではない．似たような例として $\mathbb{R}^2$ において

$$U_n := N\left(0; \frac{1}{n}\right)$$

を選ぶと,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$$

となる．よって先の問いで見たようにこれは開集合ではない．つまり定理 4.7 の (2) についても無限の和集合に置き換えることはできない.

ではなぜ, 開集合の加算共通部分は開集合にならないのだろうか．これは後述の位相空間論に関連するが, そのような性質を持つ集合を開集合とよぶのである．つまり非加算和集合や有限共通部分について閉じている集合, 可算共通部分について閉じていない集合を開集合とよぶのである．いわば定義だからであるともいえる.

定義 2.8. $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$\text{点 } x \text{ が } A \text{ の内点である．} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x;\varepsilon) \subset A.$$
$$\text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点である．} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x;\varepsilon) \subset A^c.$$

さらに

$$A^i := \{x \in A : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の内点}\},$$
$$A^e := \{x \in A^c : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点}\}$$

とおき, それぞれ A の内部 (interior), A の外部 (exterior) とよぶ．定義より $A^i \subset A$, $A^e \subset A^c$ が成立する.

例　$A := [0,1]$ のとき, $x = 0.1$, $x = 0.01$ は A の内点. $x = 0$ や $x = 1$ は A の内点ではない. $A^i = (0,1)$. また, $x = -0.1$ や $x = 1.1$ は A の外点. $x = 0$ や $x = 1$ は A の外点ではない. $A^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

内点の定義に現れる条件は開集合の定義の条件そのものである. つまり, A が開集合であれば, A の点 x はすべて A の内点である. すなわち次の定理が成立する:

定理 2.9. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) A が $\mathbb{R}^2$ の開集合;

(ii) $A^i = A$.

証明　(i) ならば (ii) について. (i) を仮定する, すなわち A が $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. まず $(\subset)$ を示す. $x \in A^i$ とすると, A^i の定義より $A^i \subset A$ なので $x \in A$. 次に $(\supset)$ を示す. $x \in A$ とすると, A は開集合なので $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A.$$

すなわち, x は A の内点である. よって $x \in A^i$.

(ii) ならば (i) について. (ii) を仮定する, すなわち $A^i = A$ を仮定する. A が開集合であることを示すには $^\forall x \in A$, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

を示せばよいが, $x \in A$ とすると $A = A^i$ より x は A の内点となる. 内点の定義より $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

が成立する. □

これらが同値なので結局, 開集合の定義を (ii) に置き換えてもいいことになる.

問　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次を証明せよ.
(i) $A^i \cap A^e = \emptyset$.
(ii) $B \subset A$ ならば, $B^i \subset A^i$.

証明　(i) 背理法で示す. $A^i \cap A^e \neq \emptyset$ と仮定すると, $x \in A^i \cap A^e$ がとれる. $x \in A^i$ かつ $x \in A^e$ だが, $A^i \subset A$, $A^e \subset A^c$ より $x \in A$ かつ $x \in A^c$ となり矛盾. □
(ii) $B \subset A$ と仮定する. $B^i \subset A^i$ を示す. $x \in B^i$ とする. 内部の定義より x は B の内点なので, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

がいえるが, 仮定 $B \subset A$ より

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

までいえて, x に対して A に含まれるように半径 $\varepsilon_x > 0$ の ε-近傍がとれたことになる. つまり点 x は A の内点であることが示された. よって $x \in A^i$ となり, $B^i \subset A^i$. □

定理 2.10. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次が成立する:

(1) $(A^i)^i = A^i$. つまり A^i は開集合.

(2) A^e は開集合.

証明　(1) まず, $(A^i)^i = A^i$ を示す. $(\subset)$ について, $x \in (A^i)^i$ とする. 内部の定義より $x \in A^i$. $(\supset)$ について, $x \in A^i$ とする. 内部の定義より x は A^i の内点なので, $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

実は,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A^i \tag{2.1}$$

までいえることを示す. $y \in N(x;\varepsilon_x)$ とすると, $\varepsilon := \varepsilon_x - d(x,y)$ とおけば, $\varepsilon > 0$ でさらに,

$$N(y;\varepsilon) \subset N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

がいえる. これより, y は A の内点である. すなわち, $y \in A^i$ なので, (2.1) が成立する. 従って, x は A^i の内点である. すなわち, $x \in (A^i)^i$.

　最後に, $(A^i)^i = A^i$ といえたので, 定理 4.9 より, A^i は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. □

(2) まず, 外部の定義より, $A^e = (A^c)^i$. よって, 上で示した (1) を A^c に用いればその内部 $(A^c)^i$ は開集合である. □

定理 2.11. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合である.

証明　$B \subset A$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき, $B \subset A^i$ を示すことで, A^i が A に含まれる開集合の中で最大の開集合であることを示す.

　$x \in B$ とする. B は開集合なので $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A$ なので,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

といえる. つまり, x は A の内点である. よって, $x \in A^i$. つまり, $B \subset A^i$. まとめると, A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても, $B \subset A^i$ となるので, A^i が開集合であることから, A^i は A に含まれる最大の開集合といえる. □

別解　仮定より $B \subset A$ で, 内部の性質より $B^i \subset A^i$ が得られる．さらに B は開集合なので同値性から $B^i = B$ が得られるので $B = B^i \subset A^i$ が示される (集合の包含関係の定義には戻らず, これまで得られた結果をつなぎ合わせて $B \subset A^i$ を示す).

問　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の外部 A^e は A^c に含まれる最大の開集合であることを証明せよ.

解答例　$B \subset A^c$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．このとき, $B \subset A^e$ を示すことで, A^e が A^c に含まれる開集合の中で最大の開集合であることを示す．$x \in B$ とする．B は開集合なので $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A^c$ なので,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A^c$$

といえる．つまり, x は A の外点である．よって, $x \in A^e$．つまり, $B \subset A^e$．まとめると, A^c に含まれるどのような開集合 B をえらんできても, $B \subset A^e$ となるので, A^e が開集合であることから, A^e は A^c に含まれる最大の開集合といえる．□

問　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次を証明せよ.

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

証明　$(\subset)$ について, $x \in (A \cap B)^i$ とする．内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である．よって $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_x) \subset B$$

といえる．これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

$(\supset)$ について, $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$. 内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $^\exists\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_x) \subset B$$

となり,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A\cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x\in(A\cap B)^i.$$

以上より等号が成立. □

問　$A\subset\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{R}^2$ とする. ${}^\forall\varepsilon>0,\ N(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ ならば $x\notin A^e$ であることを証明せよ.

証明　対偶を示す. すなわち $x\in A^e$ ならば ${}^\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $N(x;\varepsilon_0)\cap A=\emptyset$ を示せばよい. $x\in A^e$ とすると外部の定義より, 点 x は A の外点なので ${}^\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $N(x;\varepsilon_0)\subset A^c$. よって, $N(x;\varepsilon_0)\cap A=\emptyset$. □

問　$A\subset\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{R}^2$ とする. ${}^\forall\varepsilon>0,\ N(x;\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset$ ならば $x\notin A^i$ であることを証明せよ.

証明　対偶を示す. すなわち $x\in A^i$ ならば ${}^\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $N(x;\varepsilon_0)\cap A^c=\emptyset$ を示せばよい. $x\in A^i$ とすると内部の定義より, 点 x は A の内点なので ${}^\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $N(x;\varepsilon_0)\subset A$. よって, $N(x;\varepsilon_0)\cap A^c=\emptyset$. □

定義 2.12. $A\subset\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{R}^2$ とする.

$$\begin{aligned}\text{点 } x \text{ が } A \text{ の境界点である.} &\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\varepsilon>0,\ N(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \text{ かつ } N(x;\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset.\\ &\iff x\notin A^e \text{ かつ } x\notin A^i.\\ \text{点 } x \text{ が } A \text{ の触点である.} &\overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall\varepsilon>0,\ N(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset.\end{aligned}$$

さらに

$$\partial A:=\{x\in\mathbb{R}^2:\text{点 } x \text{ が } A \text{ の境界点}\}$$
$$\overline{A}:=\{x\in\mathbb{R}^2:\text{点 } x \text{ が } A \text{ の触点}\}$$

とおき, それぞれ A の境界 (frontier, boundary), A の閉包 (closure) とよぶ. 定義より A の境界とは内部でも外部でもない点全体のことである. また ∂A を A^f, $\overline{A}$ を $\overline{A}^{\mathbb{R}^2}$ や A^a(adherent point) と書くこともある. 特に $\overline{A}$ の記号は高等学校の数学では A の補集合 A^c の意味で用いてきたので注意が必要である.

なお, $x\in A$ ならば, $\varepsilon>0$, $x\in N(x;\varepsilon)$ であるので $N(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ がいえるため,

$$A\subset\overline{A}$$

が常に成り立つことに注意する.

なお, 境界点の定義の後半にある同値について証明を確認しておく:

$$\text{点}\,x\,\text{が}\,A\,\text{の境界点である}. \quad\Longleftrightarrow\quad x \notin A^e \text{ かつ } x \notin A^i.$$

($\Longrightarrow$) について, 定義 2.12 の上にある 2 つの問いより成立.
($\Longleftarrow$) について, $x \notin A^e$ より, 外点の定義を否定して, ${}^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \not\subset A^c$. すなわち, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 同時に, $x \notin A^i$ より, 内点の定義を否定して, ${}^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \not\subset A$. すなわち, $N(x;\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. よって x が A の境界点であることの定義を満たすので成立.

性質 2.13. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. このとき

$$\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e, \quad \overline{A} = A^i \cup \partial A, \quad (\overline{A})^c = A^e.$$

さらに, A^e は開集合なので $\overline{A}$ は閉集合である.

証明　1 つ目の

$$\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$$

を示す. ($\subset$) について, $x \in \mathbb{R}^2$ とすると, 以下で場合分けできる:

(i) $x \in A^i$ のとき, $x \in A^i \cup \partial A \cup A^e$.

(ii) $x \notin A^i$ のとき, さらに以下で場合分けできる:

(ii)-1 $x \in A^e$ のとき, $x \in A^i \cup \partial A \cup A^e$.

(ii)-2 $x \notin A^e$ のとき, $x \notin A^i$ でもあるので, $x \in \partial A$. よって $x \in A^i \cup \partial A \cup A^e$.

以上より, $x \in A^i \cup \partial A \cup A^e$. ($\supset$) について, $x \in A^i \cup \partial A \cup A^e$ とすると, $x \in A^i$ または $x \in \partial A$ または $x \in A^e$ なので, 3 通りで場合分けできるがいずれの場合にも $x \in \mathbb{R}^2$ である. 実際

(i) $x \in A^i$ のとき, 内部の定義より $x \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $x \in \partial A$ のとき, 境界の定義より $x \in \mathbb{R}^2$.

(iii) $x \in A^e$ のとき, 外部の定義より $x \in \mathbb{R}^2$.

以上より, 1 つ目の等号が成立.
2 つ目の

$$\overline{A} = A^i \cup \partial A$$

を示す. ($\subset$) について, $x \in \overline{A}$ とすると, 閉包の定義より点 x は A の触点であるので

$${}^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

先の問より, $x \notin A^e$. よって 1 つ目の等号から $\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$ であったので,

$$x \in A^i \cup \partial A.$$

($\supset$) について, $x \in A^i \cup \partial A$ とすると, $x \in A^i$ または $x \in \partial A$ で場合分けできる.

(i) $x \in A^i$ のとき, 内部の定義より $A^i \subset A$ なので $x \in A$ となり, $x \in \overline{A}$.

(ii) $x \in \partial A$ のとき, 境界の定義より, 点 x は A の境界点であるので, ${}^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x;\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ を満たす. よってその片方である $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ を満たすので, これは点 x が A の触点であることを意味する. よって $x \in \overline{A}$.

以上より, 2 つ目の等号が成立.
3 つ目の等式は補集合の定義 $(\overline{A})^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}$ そのものである. □

定理 2.14. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

証明　$A \subset B$ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする. このとき, $\overline{A} \subset B$ を示すことで, $\overline{A}$ が A を含む閉集合の中で最小であることを示す. そこで, 対偶に相当する $(\overline{A})^c \supset B^c$ を示す. $x \in B^c$ とする. B は閉集合なので B^c は開集合である. よって ${}^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B^c.$$

ここで, $A \subset B$ なので $A^c \supset B^c$ から,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A^c$$

といえる. つまり, x は A の外点である. よって, $x \in A^e$. 性質 4.13 から $(\overline{A})^c = A^e$ なので $x \in (\overline{A})^c$, つまり, $B^c \subset (\overline{A})^c$. これより $\overline{A} \subset B$ が得られた. まとめると, A を含むどのような閉集合 B をえらんできても, $\overline{A} \subset B$ となるので, $\overline{A}$ が閉集合 (補集合が開集合) であることから, $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であるといえる. □

定理 2.15. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) A が $\mathbb{R}^2$ の閉集合;

(ii) $\overline{A} = A$.

証明　(i) ならば (ii) を示す. A を閉集合とする. $\overline{A}$ の定義より $\overline{A} \supset A$ は常に成り立つ. 一方, 定理 4.14 より $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合なので, A 自身が閉集合であると仮定しているので $\overline{A} \subset A$ を得る (閉集合どうしの比較). 以上より $\overline{A} = A$.

(ii) ならば (i) を示す. $\overline{A} = A$ を仮定する. 定理 4.14 より閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることが分かっているので, これは A が閉集合であることを意味する. よって成立.
□

これらが同値なので結局, 閉集合の定義を (ii) に置き換えてもいいことになる.

定理 2.16. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次が成立する:

(i) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(ii) $A \subset B$ ならば, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

証明　(i) 閉包 $\overline{A}$ は性質 4.13 より $(\overline{A})^c = A^e$ が得られたことで閉集合であることが分かっていた．よって定理 4.15 を $\overline{A}$ に用いれば $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ が成立する．
(ii) $x \in \overline{A}$ とする．閉包の定義より点 x は A の触点なので, ${}^\forall\varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. ここで, 仮定 $A \subset B$ より

$$N(x;\varepsilon) \cap A \subset N(x;\varepsilon) \cap B$$

よって, $N(x;\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ である．実際, 少なくとも 1 つは $y \in N(x;\varepsilon) \cap A$ がとれるから $y \in N(x;\varepsilon) \cap B$ となるためである．よって x は B の触点であることが示せたので, $x \in \overline{B}$.
□

定理 2.17. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．次の (i) と (ii) は同値である．

(i) A が $\mathbb{R}^2$ の閉集合;

(ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ とし, $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ を満たすと仮定すると, $x \in A$.

ただし, $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ の定義は ${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^\forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

である．

証明　(i) ならば (ii) を示す．A を閉集合とすると, 定理 4.15 より $\overline{A} = A$. $x_n \in A (n \in \mathbb{N})$ とし, $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ を満たすと仮定する．$x \in A$ を示すには $x \in \overline{A}$, つまり x が A の触点であることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ とすると $x_n \to x$ より ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^\forall n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

もちろん

$$d(x_{N_\varepsilon}; x) < \varepsilon$$

なので, $x_{N_\varepsilon} \in N(x;\varepsilon)$ といえる．$x_{N_\varepsilon} \in A$ であったので

$$N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

つまり, x は A の触点となり $x \in \overline{A} = A$.
(ii) ならば (i) を示す．(ii) を仮定する．定理 4.15 より $\overline{A} = A$ を示せばよいが, 閉包の定義より $\overline{A} \supset A$ は常に成り立つ．$\overline{A} \subset A$ を示す．$x \in \overline{A}$ とする．閉包の定義より点 x は A の触点であるので, ${}^\forall\varepsilon > 0$,

$$N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

そこで, $n \in \mathbb{N}$ とし, $\varepsilon := 1/n$ に対して上記定義を用いると,

$$N\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

ゆえに, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n \in N\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A$$

がとれる. このとき, $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ である. 実際,

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

より $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

とできるので,

$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

ここで (ii) を仮定しているので $x \in A$ が得られ, $\overline{A} \subset A$ が示された. 以上より $\overline{A} = A$ となり A は閉集合である. □

定義 2.18. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 開集合 $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ たちの集合 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$(集合の集合のことを集合族とよぶことがある, つまり $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は開集合の族と言ったりする) が

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を満たしていると仮定する (これを被覆とよび, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が開集合族であることから, 開被覆とよぶ). このとき, $\lambda \in \Lambda$ の中から有限個だけ $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N\} \subset \Lambda$ を選び直して

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\lambda_k}$$

と A を覆えるとき, A はコンパクトである, または A はコンパクト集合であると定義する.

　コンパクトの定義は端的に「任意開被覆に対して有限開被覆が存在する」となされることがある.

定理 2.19. $A \subset \mathbb{R}^2$ をコンパクト集合とする. $B \subset A$ が閉集合ならば B もコンパクト集合である.

証明　　$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を B の任意開被覆とする. すなわち,

$$B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

を満たしていると仮定する. B は閉集合なので B^c は開集合である. そこで $U_{\lambda_0} := B^c$ とおき, $\Lambda' := \Lambda \cup \{\lambda_0\}$ と添え字集合をとりなおして (1 つだけ追加して) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ を考える. まず,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$$

が成立する. 実際, $x \in A$ とすると,

(1) $x \in B$ のとき,

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

(2) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c = U_{\lambda_0}$ より

$$x \in U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

つまり $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ がコンパクト集合 A の開被覆になっている. よってコンパクトの定義より有限開被覆が選び直せて (その中に U_{λ_0} が入っていても入っていなくてもどちらでもよいが入れても問題ない), すなわち $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \subset \Lambda'$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{N} U_{\lambda_k}$$

とできる. $B \subset A$ より

$$B \subset \bigcup_{k=0}^{N} U_{\lambda_k}$$

であるが, $U_{\lambda_0} = B^c$ は取り除いて,

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\lambda_k}$$

とできる. $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \subset \Lambda$ より $\{U_{\lambda_k}\}_{k=1}^{N}$ が B の任意開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対する有限開被覆になっているので, B はコンパクト集合である. □

定義 2.20. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. ある定数 $M > 0$ が存在して

$$^\forall x \in A,\ |x| \leq M$$

を満たすとき, A は有界であると定義する [1)].

定理 2.21 (Heine–Borel の被覆定理)**.** $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) A が $\mathbb{R}^2$ の有界かつ閉集合である.

(ii) A がコンパクトである.

[1)] X が一般の距離空間の場合には, つまり (X, d) を距離空間とすると, $A \subset X$ に対して, ある定数 $M > 0$ とある点 $a \in A$ が存在して

$$^\forall x \in A,\ d(x, a) \leq M$$

を満たすとき, A は有界であると定義される. この場合 $X = \mathbb{R}^2$ のとき, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ を距離空間とみれば, $a = 0$ を選ぶことでこの定義は上記の定義 2.20 と同値である.

証明　(i) ならば (ii) を示す．まず, (i) を仮定すると, A は有界なので, ある定数 $M > 0$ が存在して

$$A \subset N(0; M)$$

を満たす．さらにこの $N(0; M)$ を覆うように閉集合である正方形 S

$$N(0; M) \subset S := [-M, M] \times [-M, M]$$

がとれる．S を覆う任意開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, 有限開被覆を持たないと仮定する．
　第 1 象限から第 4 象限まで 4 分割し

$$\begin{aligned} S_1 &:= [0, M] \times [0, M], \\ S_2 &:= [-M, 0] \times [0, M], \\ S_3 &:= [-M, 0] \times [-M, 0], \\ S_4 &:= [0, M] \times [-M, 0] \end{aligned}$$

とおく．このうち少なくとも 1 つの S_i は有限開被覆を持たない, つまり有限個では覆い尽くせないことになる．なぜなら, すべてが有限開被覆を持てば, それらの総数で少なくても S が有限個の U_λ で覆い尽くせてしまうからである．その正方形を $S^{(1)}$ とおく．次にこの正方形 $S^{(1)}$ に対して同様に 4 分割して, $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_3^{(1)}$, $S_4^{(1)}$ と名前をつけると, このうち少なくとも 1 つの $S_i^{(1)}$ は有限開被覆を持たない．その正方形を $S^{(2)}$ とおく．これを繰り返すと, 有限開被覆を持たない閉集合である正方形の族 $S^{(n)}$ が存在して

$$S \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \cdots \supset S^{(n)} \supset \cdots$$

がとれるが, 正方形の作り方から $S^{(1)}$ の 1 辺の長さは M, $S^{(2)}$ の 1 辺の長さは $M/2$, $S^{(3)}$ の 1 辺の長さは $M/2^2$ のように $S^{(n)}$ の 1 辺の長さが $M/2^{n-1}$ と一般化され, $n \to 0$ とするとはさみうち原理より, ある点 x が存在して

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^{(n)} \subset S.$$

いま, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は S を覆う開集合族なので, ${}^\exists \lambda_x \in \Lambda$ s.t.

$$x \in U_{\lambda_x}$$

であるが, U_{λ_x} が開集合なので ${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon) \subset U_{\lambda_x}.$$

であるが, 一方で, この $\varepsilon > 0$ に対して, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$S^{(N_\varepsilon)} \subset N(x; \varepsilon)$$

なぜなら, 一辺の長さは 0 に収束するからである. つまり $S^{(N_\varepsilon)}$ は有限開被覆を持たない正方形であったはずなのに U_{λ_x} ただ 1 つで覆えてしまっていることになり矛盾. よって閉集合 S はコンパクトである.

$$A \subset S$$

であり, A が閉集合なので定理 4.19 より A もコンパクトである.

(ii) ならば (i) を示す. A がコンパクトであると仮定する. まずは A が有界な集合であることを示す. $x_0 \in A$ を選んで固定しておく. このとき

$$U_n := N(x_0; n)$$

とおくと,

$$A \subset \mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{K}} U_n$$

より $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は A の開被覆である. よってコンパクトの定義から有限個の $\{U_n\}_{n=1}^{K}$ で覆い直せるが, 実は最大の半径を持つ U_K たった 1 つで覆っている. よって, この $N(x_0; K)$ をさらに覆うように $M > 0$ が存在して

$$A \subset N(x_0; K) \subset N(0; M)$$

とできる. よって A は有界である. 次に A^c が開集合であることを示す. $x \in A^c$ とする. 任意の $y \in A$ に対して,

$$\varepsilon_y := \frac{1}{3} d(x, y)$$

とおくと, $x \in A^c$, $y \in A$ より $d(x, y) > 0$ なので $\varepsilon_y > 0$ である. さらに

$$N(x; \varepsilon_y) \cap N(y; \varepsilon_y) = \emptyset$$

も得られる. いま

$$U_y := N(y; \varepsilon_y)$$

とおくと, U_y は開集合で

$$A \subset \bigcup_{y \in A} U_y$$

を満たすので $\{U_y\}_{y \in A}$ は A の開被覆である. A がコンパクトであることから, 有限個で覆い直せる, すなわち $y_1, y_2, \ldots, y_K$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{K} U_{y_k}.$$

そこで, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{y_2}, \ldots, \varepsilon_{y_K}\}$ とおくと $\varepsilon > 0$ でさらに $N(x; \varepsilon) \subset N(x; \varepsilon_k)$ なので

$$N(x; \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{K} N(y_k; \varepsilon_{y_k}) \right) = \emptyset.$$

つまり

$$N(x;\varepsilon) \subset A^c$$

が成立する. 実際, $N(x;\varepsilon) \subset A$ ならばある点 $z \in N(x;\varepsilon) \cap A$ がとれるが,

$$z \in A \subset \bigcup_{k=1}^{K} U_{y_k}$$

となり矛盾. 以上より A^c は開集合であるので, A は閉集合である. □