2023/06/01/

位相入門I・勉強会 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ A, B, C を空でない集合とする. 集合の等号の定義に従って

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を証明せよ.

証明 まず, $(\subset)$ を示す. $x \in A \cap (B \cup C)$ とする. このとき, 共通部分の定義から $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$, すなわち和集合の定義から $x \in B$ または $x \in C$ が成立する.
(i) $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので, 共通部分の定義から $x \in A \cap B$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので, 共通部分の定義から $x \in A \cap C$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i), (ii) より

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

次に, $(\supset)$ を示す. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする. 和集合の定義から $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する.
(i) $x \in A \cap B$ のとき, 共通部分の定義から $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき, 共通部分の定義から $x \in A$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i), (ii) より

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上より, $(\subset)$ と $(\supset)$ が証明されたので等号が成立する. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ A_α, B を空でない集合とする. ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合. このとき

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

を集合の包含関係の定義に従って証明せよ.

証明　$x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$ とする．共通部分の定義より $^\forall\alpha \in I$, $x \in B\cup A_\alpha$ である．
(i) $x\in B$ のとき, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$.
(ii) $x \notin B$ のとき, $^\forall\alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ といえる．実際, もしそうでないなら, $^\exists\alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ だが, $x\notin B$ でもあるので, $x \notin B\cap A_{\alpha_0}$ となり, これは $x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$ に矛盾するからである．よって, 共通部分の定義から $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

(i), (ii) より

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$$

すなわち

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \supset \bigcap_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha).$$

□

$\boxed{\mathbf{3}}$　X, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする．ただし, $\alpha\in I$ で I は添え字集合．このとき

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$$

を集合の等号の定義に従って証明せよ．ただし, A^c とは A の補集合で, $A^c := X \setminus A$ で定義されるものとする．

証明　まず, ($\subset$) を示す．$x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c$ とする．補集合の定義から, $x\in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. つまり, これから

$$^\forall\alpha\in I, x\notin A_\alpha$$

がいえる. 実際, もしそうでなければ, $^\exists\alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ となり矛盾するからである．ゆえに, 補集合の定義から

$$x \in A_\alpha^c$$

が得られるので

$$x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

次に, ($\supset$) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$ とする．共通部分の定義から

$$^\forall\alpha\in I, x\in A_\alpha^c,$$

すなわち, $x\notin A_\alpha$. このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

実際, もしそうでなければ, $^\exists\alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるので矛盾するからである．ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

以上より等号成立.　□

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f: X \to Y$ とし, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする. ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合. このとき

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を集合の包含関係の定義に従って証明せよ.

証明 $y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする. 像の定義より, ${}^\exists x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$. さらに, 和集合の定義より, ${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$. 再び, 像の定義より

$$y \in f(A_{\alpha_0}).$$

ゆえに和集合の定義より

$$y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

以上より

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

□

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 「全射」, 「単射」, 「全単射」, 「いずれでもない」かを判断し, 最も適切なものを選び答えよ. (「全単射」な関数を「全射」と答えた場合には不正解という意味. つまり「全射」は「全射ではあるが単射ではない」という意味で用いること.)

(1) $f(x) = x^2$.

(2) $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

(3) $f(x) = x^3$.

(4) $f(x) = \sin x$, (ただし, 定義域は $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$).

解答 (1) いずれでもない, (2) 全射, (3) 全単射, (4) 単射.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を論理記号で書け.

(1) ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in E$, $x \le K$.

(2) ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \ge N_\varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

解答 (1) ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x_K \in E$ s.t. $x_K > K$.
(1) ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x \in E$ s.t. $x > K$ など.
(2) ${}^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. ${}^\forall N \in \mathbb{N}$, ${}^\exists n_N \ge N$ s.t. $|a_{n_N} - a| \ge \varepsilon_0$.
(2) ${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall N \in \mathbb{N}$, ${}^\exists n \ge N$ s.t. $|a_n - a| \ge \varepsilon$ など.

$\boxed{7}$ 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $a_n := \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$

証明 (1) ${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ {}^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon $$

を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ \frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon. $$

このとき, ${}^\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$ \frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n $$

より

$$ \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon. $$

よって,

$$ \begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} $$

以上により

$$ a_n \to 0 \quad (n \to +\infty). $$

□

(2) ${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ {}^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - 0\right| < \varepsilon $$

を示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$ \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon. $$

このとき, ${}^\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$ \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n $$

より

$$ \frac{1}{n} < \varepsilon. $$

よって, $|\cos\frac{n\pi}{2}| \leq 1$ に注意して

$$ \begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - 0\right| &= \frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned} $$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

$\square$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_\infty(a, b) := \max\bigl\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\bigr\}$$

と定義する (L^∞ 距離). 次の問いに答えよ.

(1) $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_\infty(a, b) = \max\{|4 - 4|, |0 - 3|\} = 3$$
$$d_\infty(b, c) = \max\{|4 - 2|, |3 - 2|\} = 2$$
$$d_\infty(a, c) = \max\{|4 - 2|, |0 - 2|\} = 2$$

(2) d_∞ は $\mathbb{R}^2$ の距離であることを示せ.

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X = \mathbb{R}^2$ とする. (D1) について,

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq |x_1 - y_1| \geq 0$$

また, $d_\infty(x, y) = 0$ ならば,

$$|x_1 - y_1| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = d_\infty(x, y) = 0,$$
$$|x_2 - y_2| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = d_\infty(x, y) = 0$$

となり, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, よって $x = y$. 逆に $x = y$ ならば, $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ より $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0$. よって (D1) が成立.

次に, (D2) について, $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d_\infty(y, x)$ より (D2) も成立.

最後に, (D3) について, 定義から

$$d_\infty(x, z) = \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\}$$

であるので, どちらが大きいか場合分けして考える.

(i) $|x_1 - z_1| \geq |x_2 - z_2|$ のとき.

$$\begin{aligned}
d_\infty(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\
&= |x_1 - z_1| \\
&\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \\
&\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\
&= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)
\end{aligned}$$

(ii) $|x_1 - z_1| < |x_2 - z_2|$ のとき.

$$\begin{aligned}
d_\infty(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\
&= |x_2 - z_2| \\
&\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\
&\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\
&= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)
\end{aligned}$$

よって (D3) も成立. つまり, d_∞ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離である.