令和6年度 位相入門II 小テスト対策 No.2

＿＿＿＿＿ 課程 ＿＿＿＿＿ 回生　学籍番号 ＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$ 次の集合 A, B についてそれぞれ, 内部, 外部, 境界, 閉包がどのような集合になるか求めよ. 証明する必要はない.

$$A = (0, 1],$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$A^i = (0, 1)$,
$A^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$,
$\partial A = \{0\} \cup \{1\}$,
$\overline{A} = [0, 1]$.

$B^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,
$B^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$,
$\partial B = \{0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$,
$\overline{B} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

$\boxed{6}$ $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ を証明せよ.

(証明) ($\subset$) について, $x \in (A \cap B)^i$ とする. 内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である. よって ${}^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

といえる. これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

($\supset$) について, $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$. 内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので ${}^\exists\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_A) \subset A$$

かつ

$$N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_B) \subset B$$

となり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x \in (A \cap B)^i.$$

以上より等号が成立. □

$\boxed{7}$ $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合であることを証明せよ．

(証明) $B \subset \mathbb{R}^2$ を $B \subset A$ を満たす任意の開集合とする．このとき，$B \subset A^i$ を示すことで，A^i が A に含まれる開集合の中で最大の開集合であることを示す．$x \in B$ とする．B は開集合なので $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B.$$

ここで，$B \subset A$ なので，

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

といえる．つまり，x は A の内点である．よって，$x \in A^i$．つまり，$B \subset A^i$．まとめると，A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても，$B \subset A^i$ となるので，A^i が開集合であることから，A^i は A に含まれる最大の開集合といえる． □

(別証明) $B \subset \mathbb{R}^2$ を $B \subset A$ を満たす任意の開集合とする．このとき，$B \subset A^i$ を示すことで，A^i が A に含まれる開集合の中で最大の開集合であることを示す．仮定より $B \subset A$ で，内部の性質より $B^i \subset A^i$ が得られる．さらに B は開集合なので同値性から $B^i = B$ が得られるので $B = B^i \subset A^i$ が示される．

$\boxed{8}$ $A \subset \mathbb{R}^2$ を閉集合とする．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ とし，$x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ を満たすと仮定する．次の問いに答えよ．

(1) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$ における $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ の定義を ε-N 論法でかけ．

(2) $x \in A$ を証明せよ．

(1) $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad d_2(x_n, x) < \varepsilon.$$

(2) A を閉集合とすると，定義より A^c は開集合である．よって $(A^c)^i = A^c$．一方，$A^e = (A^c)^i$ より $A^c = A^e$．一般に $\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$ より

$$A = A^i \cup \partial A = \overline{A}.$$

$x_n \in A (n \in \mathbb{N})$ とし，$x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ を満たすと仮定する．$x \in A$ を示すには $x \in \overline{A}$，つまり x が A の触点であることを示せばよい．$\varepsilon > 0$ とすると $x_n \to x$ より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad d_2(x_n, x) < \varepsilon.$$

もちろん

$$d_2(x_{N_\varepsilon}; x) < \varepsilon$$

なので，$x_{N_\varepsilon} \in N(x;\varepsilon)$ といえる．$x_{N_\varepsilon} \in A$ であったので

$$N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

つまり，x は A の触点となり $x \in \overline{A} = A$． □