令和 6 年度 位相入門 II 小テスト対策 No.1

________ 課程 ________ 回生　学籍番号 ________ 名前 ____________

このプリントは 7/11(木) の講義開始時に配布されます. 受け取ったらその後の対応は自由です. 教室内で問題を解く場合には他者と教え合いをしてかまいませんが, 大きな声で騒ぐのはやめましょう. また, 開始時から TA として深尾研究室のメンバーに待機してもらいます. 質問できますので, 積極的に自分から声をかけて講義の時間を有効に利用しましょう.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ に次のようないくつかの距離を考える:
$x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2)$ とし

$$d_p(x,y) := \{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p < \infty),$$
$$d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$
$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

このとき, 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d_2), (\mathbb{R}^2, d_\infty), (\mathbb{R}^2, d)$ における, 原点中心, 半径 1 の ε-近傍 $N(0;1)$ をそれぞれ図示せよ. ただし, それぞれの違いが分かるように図は重ねて書かないようにしなさい.

以後, 断りが無ければ $\mathbb{R}^2$ は距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$ を意味する.

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.
(1) $a \in \mathbb{R}^2$ とする. $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は開集合であることを証明せよ.
(証明) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ とおく. $^\forall x \in U$, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := d(x,a)$ とおくと, $x \in U$ より $x \neq a$ なので, 距離の定義より $\varepsilon_x > 0$ である. この半径 ε_x で

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U \ (= \mathbb{R}^2 \setminus \{a\})$$

を示す. $y \in N(x;\varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義より $d(y,x) < \varepsilon_x$. ゆえに

$$d(x,y) < \varepsilon_x = d(x,a).$$

よって, 距離の定義より $y \neq a$ が分かり $y \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$. 以上より

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

がいえたので, U は開集合である. □

(2) $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする ($\lambda \in \Lambda$ は添え字). このとき,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も開集合であることを証明せよ.
(証明) $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく. $^\forall x \in U$, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき和集合の定義から $^\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t.

$$x \in U_{\lambda_0}.$$

この選ばれた U_{λ_0} も開集合なので, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U_{\lambda_0}.$$

さらに

$$U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = U$$

である. よって U は開集合. □

$\boxed{3}$ $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．次の (i) と (ii) は同値であることを証明せよ．

(i) A が開集合，すなわち ${}^\forall x \in A$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A;$$

(ii) $A^i = A$.

(証明) (i) ならば (ii) について．(i) を仮定する，すなわち A が $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．まず $(\subset)$ を示す．$x \in A^i$ とすると，内部 A^i の定義より $A^i \subset A$ なので $x \in A$. 次に $(\supset)$ を示す．$x \in A$ とすると，仮定より A は開集合なので ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A.$$

すなわち，x は A の内点である．よって $x \in A^i$. つまり (ii) が成立する．

(ii) ならば (i) について．(ii) を仮定する，すなわち $A^i = A$ を仮定する．A が開集合であることを示すには ${}^\forall x \in A$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

を示せばよいが，$x \in A$ とすると $A = A^i$ より x は A の内点となる．内点の定義より ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

が成立する．つまり (i) が成立する． □

$\boxed{4}$ $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の外部 A^e, すなわち

$$A^e := \{x \in A^c : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点}\}$$

は開集合であることを証明せよ．

(証明) まず，外部の定義より，$A^e = (A^c)^i$. 一般に集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$(B^i)^i = B^i$$

を満たすので，B^i は開集合である．よって $B := A^c$ とすると，その内部 $(A^c)^i$ は開集合である．すなわち，A^e は開集合である． □

(別証明) $U := A^e$ とおく．${}^\forall x \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい．$x \in U$ とする．このとき外部の定義より x は A の外点，すなわち，${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A^c$$

を満たす．このとき，実は同じ半径 $\varepsilon_x > 0$ で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A^e = U$$

を満たすことを示す．実際，$y \in N(x; \varepsilon_x)$ とする．$\varepsilon := \varepsilon_x - d(y, x)$ とおくと，ε-近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

なので，$\varepsilon > 0$ である．このとき，

$$N(y; \varepsilon) \subset N(x; \varepsilon_x) \subset A^c$$

がいえる．これにより y は A^c の内点である．すなわち $y \in (A^c)^i = A^e = U$. □