

令和6年度 位相入門II 小テスト対策 No.1

_____ 課程 _____ 回生 学籍番号 _____ 名前 _____

このプリントは7/11(木)の講義開始時に配布されます。受け取ったらその後の対応は自由です。教室内で問題を解く場合には他者と教え合いをしてかまいませんが、大きな声で騒ぐのはやめましょう。また、開始時からTAとして深尾研究室のメンバーに待機してもらいます。質問できますので、積極的に自分から声をかけて講義の時間を有効に利用しましょう。

1 \mathbb{R}^2 に次のようないくつかの距離を考える:

$x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2)$ とし

$$d_p(x, y) := \{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

このとき、距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d_2), (\mathbb{R}^2, d_\infty), (\mathbb{R}^2, d)$ における、原点中心、半径1の ε -近傍 $N(0; 1)$ をそれぞれ図示せよ。ただし、それぞれの違いが分かるように図は重ねて書かないようにしなさい。

以後、断りが無ければ \mathbb{R}^2 は距離空間 (\mathbb{R}^2, d_2) を意味する。

2 次の問いに答えよ。

(1) $a \in \mathbb{R}^2$ とする。 $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は開集合であることを証明せよ。

(2) $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする ($\lambda \in \Lambda$ は添え字)。このとき、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も開集合であることを証明せよ。

3 $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次の (i) と (ii) は同値であることを証明せよ.

(i) A が開集合, すなわち $\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A;$$

(ii) $A^i = A$.

4 $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の外部 A^e , すなわち

$$A^e := \{x \in A^c : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点}\}$$

は開集合であることを証明せよ.