

位相入門II・自習シート

問1 \mathbb{R}^2 に通常距離

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \text{ただし, } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

を考える. $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 次で与えられる集合は \mathbb{R}^2 の開集合であることを証明せよ.

- (1) \mathbb{R}^2
- (2) $N(a; 1)$
- (3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$

問2 \mathbb{R}^2 に次のような極端な距離 (離散距離) を考える.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

この d が \mathbb{R}^2 の距離になることを証明せよ (1Q の内容).

問3 \mathbb{R}^2 に問2で定義した離散距離 d を考える. $a \in \mathbb{R}^2$ とすると, 半径 $\varepsilon := \frac{1}{3}$ の近傍 $N(a; \frac{1}{3})$ は定義より

$$N\left(a; \frac{1}{3}\right) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{3} \right\}$$

だが, $d(x, a)$ の値は0か1しかとらず, $x = a$ のときだけ0で, それ以外はいつも1となる. よって

$$d(x, a) < \frac{1}{3}$$

を満たす点は $x = a$ のみなので

$$N\left(a; \frac{1}{3}\right) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{3} \right\} = \{a\}$$

となる. この例題に従って半径 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2$ の近傍がそれぞれ \mathbb{R}^2 のどのような集合になるか求めよ.

- (1) $N(a; \frac{1}{2})$
- (2) $N(a; 1)$
- (3) $N(a; 2)$