位相入門I・自習シート

問 1　$A_n \neq \emptyset$ とし, $A_{n+1} \subset A_n$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad ({}^\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$C_n \subset C_{n+1} \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

問 2　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[1)]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

定義　$f : X \to Y$ とする. $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して

$$f(A) := \{y \in Y : {}^\exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\},$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\},$$

と定義し, それぞれ A の (f による) 像, B の (f による) 逆像とよぶ.

問 3　$f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X$, $B_\alpha \subset Y$ $({}^\forall \alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ:

(1)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(2)

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

注:　(ii) の逆向きの包含関係は成立しない.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1)]「(1) ならば (2)」,「(2) ならば (3)」,「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.