位相入門I・自習シート

問 1　a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**全て**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は

問 2　$A_\alpha,\ B$ を集合とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ

(1)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

(2)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(3)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

以後, 断りがない限り $\alpha \in I$ を添え字と添え字集合として用いる.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

「添え字集合 I が複素数の場合も考えらるんですか」の問いに答えて問題を作りました.

問 3　$I := \mathbb{C}$ とする. $\alpha \in I$ に対して $A_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |\alpha|\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 集合 A_{3+4i}, A_i, A_0 をそれぞれ図示せよ.

(2)

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

はどのような集合になるか求めよ (可能ならその等号の証明もせよ).

定義　X, A を集合とし $A \subset X$ とする. 議論の対象となる元が X の元であり, それを前提とするような場合には差 $X \setminus A$ のことを A^c とかき, A の**補集合**とよぶ場合がある [1], すなわち

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}$$

である. またこのとき, X を全体集合とよぶ.

問 4　[ド・モルガンの法則] X を全体集合とし, $A_\alpha \subset X$(ただし $\alpha \in I$) とする. **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ (例題として, 1 か所だけは証明の例を記載しておく).

(1)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって, すべての $\alpha \in I$ に対して

$$x \notin A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して, $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, その場合 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾.) よって...

[1] 上付きの ^{c} は補集合の英語 (complement) からきている. 高等学校では A の補集合を $\overline{A}$ と書いたがこの記号は別の意味に用いたいので今後, 補集合の記号は A^c を用いる.