

位相入門II・自習シート

問1 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ とし, $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ を仮定する. 開長方形 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は開集合であることを証明せよ. なお, 開長方形とは

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$$

で定義される.

問2 (X, d) として (\mathbb{R}, d) を考える. ただし, $d(x, y) := |x - y|$. また $n \in \mathbb{N}$ とし,

$$U_n := \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

とおく. 次を証明せよ.

- (1) U_n は開集合であることを証明せよ.
- (2) 集合の等号の定義に従って次を証明せよ.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1].$$

- (3) 開集合の可算共通部分は必ずしも開集合とはならないことを証明せよ. ただし, $(0, 1]$ は開集合ではないことを用いてもよい.