位相入門II・自習シート

問 1　$\mathbb{R}^2$ に通常の距離

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\quad \text{ただし}, x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$$

を考える．$a\in\mathbb{R}^2$ とする．次で与えられる集合は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ．

(1) $\mathbb{R}^2$

(2) $N(a;1)$

(3) $\mathbb{R}^2\setminus\{a\}$

解答例　(1) $U:=\mathbb{R}^2$ とおく．$^\forall x\in U$, $^\exists\varepsilon_x>0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

を示す．$x\in U$ とする．実は $\varepsilon_x>0$ としてどのような半径を選んでも $N(x;\varepsilon_x)\subset U$ となる．そこで適当に $\varepsilon_x:=1$ とすると $\varepsilon_x>0$ である．このとき，

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

である．実際, $y\in N(x;\varepsilon_x)$ とすると, ε-近傍の定義から $y\in\mathbb{R}^2=U$ である．以上より, $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ 自身の開集合である．□

(2) $U:=N(a;1)$ とおく．$^\forall x\in U$, $^\exists\varepsilon_x>0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

を示す．$x\in U$ とする．$\varepsilon_x:=1-d(x,a)$ とおくと, $x\in U=N(a;1)$ より

$$d(x,a)<1$$

なので, $\varepsilon_x>0$ である．最後にこの半径 ε_x で

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

を示せば証明は終わる．そこで, $y\in N(x;\varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義から

$$d(y,x)<\varepsilon_x.$$

よって, 距離の定義 (D3) を用いれば

$$d(y,a)\le d(y,x)+d(x,a)<\varepsilon_x+d(x,a)=1$$

ゆえに $y\in N(a,1)=U$．以上より, $N(a;1)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．□

(3) $U:=\mathbb{R}^2\setminus\{a\}$ とおく．$^\forall x\in U$, $^\exists\varepsilon_x>0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

を示す. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := d(x,a)$ とおくと, $x \in U$ より $x \neq a$ なので, 距離の定義 (D1) より

$$d(x,a) > 0$$

つまり, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x;\varepsilon_x) \subset U$$

を示せば証明は終わる. そこで, $y \in N(x;\varepsilon_x)$ とすると ε-近傍の定義から

$$d(y,x) < \varepsilon_x.$$

よって,

$$d(y,x) < \varepsilon_x = d(x,a).$$

つまり, $y \neq a$ が言える (なぜなら, もし $y = a$ ならば上の式から $d(a,x) < d(x,a)$ となり (D1) に矛盾するから). ゆえに, $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a\} = U$. 以上より, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. □

注: (2) では半径 1 の近傍を考えたが 1 は本質ではない. すなわちどのような半径 $\varepsilon > 0$ であっても $N(a;\varepsilon)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合となる.

問 2 $\mathbb{R}^2$ に次のような極端な距離 (離散距離) を考える.

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

この d が $\mathbb{R}^2$ の距離になることを証明せよ (1Q の内容).

解答例 $x,y,z \in X$ とする. (D1) について, 定義より d の値は 0 か 1 しかないので,

$$d(x,y) \geq 0$$

また, $d(x,y) = 0$ ならば, 定義より $x = y$ の場合だけである. 逆に $x = y$ ならば, 定義より $d(x,y) = 0$. よって (D1) が成立.

次に, (D2) について, $x \neq y$ のとき $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. $x = y$ のとき $d(x,y) = 0 = d(y,x)$. よって (D2) も成立.

最後に, (D3) について, $d(x,z) = 0$ のとき, $d(x,y)$ も $d(y,z)$ も 0 以上の数であることに注意すると

$$d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

よって成立. $d(x,z) = 1$ のとき, 定義から $x \neq z$ ということになるが, x, y, z の関係について, $x \neq y$ かつ $y \neq z$ ならば

$$d(x,z) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$$

となり問題ない. もし $x = y$ ならば, そのときは必ず $y \neq z$ であるので $d(y,z) = 1$. よって

$$d(x,z) = 1 \leq 0 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$$

もし, $y = z$ ばらば, そのときは必ず $x \neq y$ であるので $d(x,y) = 1$. よって

$$d(x,z) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,y) + d(y,z)$$

よって (D3) も成立. つまり, d は X 上の距離である.

問 3　$\mathbb{R}^2$ に問 2 で定義した離散距離 d を考える．$a \in \mathbb{R}^2$ とすると，半径 $\varepsilon := \frac{1}{3}$ の近傍 $N\left(a; \frac{1}{3}\right)$ は定義より

$$N\left(a; \frac{1}{3}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{3}\right\}$$

だが，$d(x,a)$ の値は 0 か 1 しかとらず，$x = a$ のときだけ 0 で，それ以外はいつも 1 となる．よって

$$d(x, a) < \frac{1}{3}$$

を満たす点は $x = a$ のみなので

$$N\left(a; \frac{1}{3}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{3}\right\} = \{a\}$$

となる．この例題に従って半径 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2$ の近傍がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ のどのような集合になるか求めよ．

(1) $N\left(a; \frac{1}{2}\right)$

(2) $N(a; 2)$

(3) $N(a; 1)$

解答　(1) $N\left(a; \frac{1}{2}\right)$ は定義より

$$N\left(a; \frac{1}{2}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{2}\right\}$$

だが，$d(x,a)$ の値は 0 か 1 しかとらず，$x = a$ のときだけ 0 で，それ以外はいつも 1 となる．よって

$$d(x, a) < \frac{1}{2}$$

を満たす点は $x = a$ のみなので

$$N\left(a; \frac{1}{2}\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \frac{1}{2}\right\} = \{a\}$$

となる．
(2) $N(a; 2)$ は定義より

$$N(a; 2) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < 2\right\}$$

だが，$d(x,a)$ の値は 0 か 1 しかとらず，$x = a$ のときだけ 0 で，それ以外はいつも 1 となる．つまりどんな点 $x \in \mathbb{R}^2$ に対してもよって

$$d(x, a) \leq 1 < 2$$

を満たす．つまり

$$N\left(a; 2\right) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < 2\right\} = \mathbb{R}^2$$

となる．
(3) $N(a; 1)$ は定義より

$$N(a; 1) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < 1\right\}$$

だが, $d(x,a)$ の値は 0 か 1 しかとらず, $x=a$ のときだけ 0 で, それ以外はいつも 1 となる. よって

$$d(x,a)<1$$

を満たす点は $x=a$ のみなので

$$N\left(a;1\right)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : d(x,a)<1\right\}=\{a\}$$

となる.

注: この離散距離では点 x の ε-近傍は

$$N(x;\varepsilon):=\begin{cases}\{x\} & (\varepsilon\leq 1),\\ \mathbb{R}^2 & (\varepsilon>1).\end{cases}$$

と, とても極端な集合となる.