位相入門I・小テスト対策シート

問 1 $X = \mathbb{R}^2$ とする, $x, y \in X$ に対して $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ とおき,

$$d(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, L^∞ 距離). 次の問いに答えよ.

(1) $a = (4,0)$, $b = (4,3)$, $c = (2,2)$ のとき $d(a,b)$, $d(b,c)$, $d(a,c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d(a,b) = \max\{|4-4|, |0-3|\} = 3$$

$$d(b,c) = \max\{|4-2|, |3-2|\} = 2$$

$$d(a,c) = \max\{|4-2|, |0-2|\} = 2$$

(2) d は X の距離であることを示せ.

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$ とする. (D1) を示す.

$$d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0$$

とくに, $d(x,y) = 0$ ならば,

$$|x_1 - y_1| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = d(x,y) = 0,$$

$$|x_2 - y_2| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = d(x,y) = 0$$

となり, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, よって $x = y$. 逆に $x = y$ ならば, $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ より $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0$. よって (D1) が成立.

次に, (D2) を示す. $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d(y,x)$. よって (D2) が成立.

最後に, (D3) を示す, 定義から

$$d(x,z) = \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\}$$

であるので, どちらが大きいか場合分けして考える.

(i) $|x_1 - z_1| \geq |x_2 - z_2|$ のとき.

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\ &= |x_1 - z_1| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(ii) $|x_1 - z_1| < |x_2 - z_2|$ のとき.

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\ &= |x_2 - z_2| \\ &\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

よって (D3) が成立. つまり, d は X 上の距離である.

問 2　X を空でない集合とする. $x, y \in X$ に対して

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

このとき, d は X 上の距離であることを示せ.

解答例　$x, y, z \in X$ とする. (D1) を示す. 定義より d の値は 0 か 1 しかないので,

$$d(x,y) \geq 0$$

とくに, $d(x,y) = 0$ ならば, 定義より $x = y$ の場合だけである. 逆に $x = y$ ならば, 定義より $d(x,y) = 0$. よって (D1) が成立.

次に, (D2) を示す. $x \neq y$ のとき $d(x,y) = 1 = d(y,x)$. $x = y$ のとき $d(x,y) = 0 = d(y,x)$. よって (D2) も成立.

最後に, (D3) を示す.

(i) $x = z$ のとき, $d(x,z) = 0$ であるが, $d(x,y)$ も $d(y,z)$ も 0 以上の数であることに注意すると

$$d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

よって成立.

(ii) $x \neq z$ のとき, $d(x,z) = 1$ であるが, x, y, z の関係について, y でさらに場合分けする.

(ii-あ) $y = x$ のとき, そのときは必ず $y \neq z$ であるので $d(y,z) = 1$. よって

$$d(x,z) = 1 \leq 0 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$$

(ii-い) $y = z$ のとき, そのときは必ず $x \neq y$ であるので $d(x,y) = 1$. よって

$$d(x,z) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,y) + d(y,z)$$

(ii-う) $y \neq x$ かつ $y \neq z$ のとき

$$d(x,z) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$$

となり成立.

よって (D3) が成立. つまり, d は X 上の距離である.

問 3　$X=\mathbb{R}^2$ のとき, $x,y\in X$ に対して $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ とおき,

$$d(x,y):=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

と定義する (L^2 距離, すなわち通常の 2 点間の距離 $|x-y|$). d は X の距離になることを示せ. なお三角不等式の証明については次の不等式を応用してもよい: $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ とする.

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2\le(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

が成立する (位相入門 I, 自習シート No.6 の問 2).

解答例　$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in X=\mathbb{R}^2$ とする. (D1) を示す.

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\ge 0$$

とくに, $d(x,y)=0$ ならば,

$$|x_1-y_1|\le\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=d(x,y)=0,$$
$$|x_2-y_2|\le\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=d(x,y)=0$$

となり, $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, よって $x=y$.

逆に $x=y$ ならば, $x_1=y_1$ かつ $x_2=y_2$ より $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=0$. よって (D1) が成立.

次に, (D2) を示す, $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}=d(y,x)$ より (D2) も成立.

最後に, (D3) を示す. $d(x,z)$ の 2 乗を考えてみると

$$\begin{aligned}(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2&=(x_1-y_1+y_1-z_1)^2+(x_2-y_2+y_2-z_2)^2\\&=(x_1-y_1)^2+2(x_1-y_1)(y_1-z_1)+(y_1-z_1)^2\\&\quad+(x_2-y_2)^2+2(x_2-y_2)(y_2-z_2)+(y_2-z_2)^2\end{aligned}$$

ここで, $a_1:=x_1-y_1$, $b_1:=y_1-z_1$, $a_2:=x_2-y_2$, $b_2:=y_2-z_2$ とおくと,

$$\begin{aligned}\bigl\{d(x,z)\bigr\}^2&=(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2\\&=a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2\\&=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2(a_1b_1+a_2b_2)\\&\le a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\\&=\left\{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right\}^2\\&=\left\{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}\right\}^2\\&=\{d(x,y)+d(y,z)\}^2,\end{aligned}$$

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z).$$

よって (D3) も成立. つまり, d は X 上の距離である.

注　(D3) について紹介した不等式は, ベクトル $\boldsymbol{u} := (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{v} := (b_1, b_2)$ とおくと, ベクトルの内積と大きさの性質から得られるものと同じである:

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = \big||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta\big| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$$

ただし, θ は 2 つのベクトルのなす角. この不等式はシュワルツの不等式と呼ばれ, 2 次元, n 次元ベクトルの他, 和が級数であったり, 和ではなく積分に置き換えたものへ拡張できる.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2},$$

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right| \leq \left\{\int |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}\left\{\int |g(x)|^2 dx\right\}^{1/2}.$$