位相入門I・自習シート

問 1　一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\sqrt{n}} - 0\right| &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon).\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(2) $a_n := \dfrac{1}{2^n}$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n,$$

つまり

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n}\\ &< \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon).\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

別解

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon)$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $n < 2^n$ $(^\forall n \in \mathbb{N})$ より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \quad (^\forall n \geq N_\varepsilon).\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(3) $a_n := \dfrac{1}{n}\cos n$

解答例

> ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
> $$\left|\frac{1}{n}\cos n - 0\right| < \varepsilon \quad ({}^{\forall}n \geq N_\varepsilon)$$
> を示せばよい. そこで先に
> $$\left|\frac{1}{n}\cos n - 0\right| < \varepsilon$$
> となる番号を見積もっておくと, $|\cos n| \leq 1$ $({}^{\forall}n \in \mathbb{N})$ より
> $$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\cos n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\cos n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$
> となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\cos n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\cos n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \quad ({}^{\forall}n \geq N_\varepsilon)\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

問 2　$X = \mathbb{R}$ とする. 関数 d を

$$d(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in X)$$

で定義する. $a = 1,\ b = 2,\ c = -3$ のとき

$$d(a, b), \quad d(b, c), \quad d(c, a)$$

の値をそれぞれ求めよ.

解答　$d(a,b) = d(1,2) = |1-2| = 1$, $d(b,c) = d(2,-3) = |2-(-3)| = 5$, $d(c,a) = |-3-1| = 4$.

問 3　$X := \{$ 高槻, 京都, 大津, 瀬田 $\}$ とする．それぞれ JR の駅を表すとし，その間の運賃は以下の通りとする．

A\B	高槻	京都	大津	瀬田
高槻	0	410	590	680
京都	410	0	200	330
大津	590	200	0	200
瀬田	680	330	200	0

$A, B \in X$ に対して $d(A,B)$ を上記表の値とする．例えば $A =$ 高槻, $B =$ 京都の場合

$$d(\text{高槻}, \text{京都}) = 410$$

とする．

$$d(\text{京都}, \text{大津}), \quad d(\text{大津}, \text{瀬田}), \quad d(\text{瀬田}, \text{京都})$$

の値をそれぞれ求めよ．

解答　表より

$$d(\text{京都}, \text{大津}) = 200, \quad d(\text{大津}, \text{瀬田}) = 200, \quad d(\text{瀬田}, \text{京都}) = 330.$$