2024/05/09/No.6

位相入門I・自習シート

問 1　一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の a への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{2n} + 1$, $a = 1$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| &= \frac{1}{2n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理[1]より, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{2\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{2\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2n,$$

つまり

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| &= \frac{1}{2n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1]「自然数 $\mathbb{N}$ は上に有界ではない」という定理のこと. これによりどんな実数 r に対してもその r より大きな自然数 N_r が存在することが保証される.

以上により

$$a_n \to 1 \quad (n \to +\infty).$$

別解

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| &= \frac{1}{2n}\\ &< \frac{1}{n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{2n}+1\right)-1\right| &= \frac{1}{2n}\\ &< \frac{1}{n}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 1 \quad (n \to +\infty).$$

注: 最初の解答例と比べ, 不等式を示せばいいので $1/2n < 1/n$ を利用するという工夫がある.

(2) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$

解答例

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(3) $a_n := \dfrac{1}{n}\sin n$, $a = 0$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $|\sin n| \leq 1$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

問 2　$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とする.

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

を証明せよ.

証明　左辺から右辺を引いた式は

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2 &= a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-(a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)\\ &= a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2\\ &= (a_1b_2)^2-2(a_1b_2)(a_2b_1)+(a_2b_1)^2\\ &= (a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

よって成立. □

注　$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ とする. さらに一般化した (たす数を n 個にした)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

が成立する.