位相入門I・自習シート

問1　X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ とし, $A_\alpha \subset X$ $(\forall \alpha \in I)$ とする．このとき次の等式を証明せよ.

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

解答例　$(\subset)$ を示す．$y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする．像の定義より, ある $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ が存在して $y = f(x)$. 和集合の定義より, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$x \in A_{\alpha_0}.$$

よって, 再び像の定義より $y \in f(A_{\alpha_0})$ といえる．つまり

$$y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

ゆえに $(\subset)$ が成立する.
$(\supset)$ を示す．$y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ とする．和集合の定義よりある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$y \in f(A_{\alpha_0}).$$

像の定義より, ある $x \in A_{\alpha_0}$ が存在して $y = f(x)$. このとき,

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

が得られるので再び像の定義より

$$y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

ゆえに $(\supset)$ が成立する.

以上により等号成立. □

問2　次で定義される数列を考える:

$$a_n := \frac{1}{2n+1}$$

次の問いに答えよ.

(1) この数列が初めて $|a_n| < \dfrac{1}{100}$ となるのは何番目 (第何項) か答えよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例

$$|a_n| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{100}$$

とすると, $2n+1 > 100$ が同値な条件となるので,

$$2n+1 > 100$$

を満たす最初の自然数 n を求めればよい. よって, $2n > 99$, つまり $n > \frac{99}{2} = 49.5$ を満たす最初の自然数を求めればよいので, 50 番目で初めて $|a_n| < \frac{1}{100}$ となる. 実際に確かめると

$$|a_{49}| = \frac{1}{2 \cdot 49 + 1} = \frac{1}{99} > \frac{1}{100}$$
$$|a_{50}| = \frac{1}{2 \cdot 50 + 1} = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

となり, 確かに正しい.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. この数列が初めて $|a_n| < \varepsilon$ となるのを N_ε 番目とする (第 N_ε 項). N_ε を, ガウス記号 [1] を用いた ε の式で求めよ.

解答例

$$|a_n| = \frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} &< \varepsilon, \\ 2n+1 &> \frac{1}{\varepsilon}, \\ 2n &> \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, \\ n &> \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

つまり

$$n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

が同値な条件となり, これを満たす最初の自然数 n を求めればよい. そこで, ガウス記号で表される

$$\left\lfloor \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rfloor$$

を考えると, この自然数の次の自然数が, 条件を満たす最初の自然数 N_ε となるので

$$N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

[1] 実数 r に対して「r の整数部分」を $\lfloor r \rfloor$ とかき, この括弧をガウス記号とよぶ. つまり $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 49$.

となる. 実際に, (1) を用いて確かめると, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ のとき

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &= \left\lfloor \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{1-\frac{1}{100}}{2\cdot\frac{1}{100}} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\frac{99}{100}}{\frac{2}{100}} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= 49 + 1 = 50 \end{aligned}$$

となり, 確かに正しい.

問 3 平面上の格子点 O(0, 0), A(4, 0), B(4, 3), C(2, 2) に対して次に問いに答えよ.

(1) 線分 OA, OB, OC の長さをそれぞれ求めよ.

解答例 例えば線分 OA の長さを |OA| と絶対値を用いてかくことにする. $|\mathrm{OA}| = 4$, $|\mathrm{OB}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $|\mathrm{OC}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

(2) 点 O, A, B のうち直線距離で点 C に最も近い点を求め, その直線距離を求めよ.

解答例 $|\mathrm{CO}| = |\mathrm{OC}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathrm{CA}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathrm{CB}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ より, 点 B が最も近く, $|\mathrm{CB}| = \sqrt{5}$.

(3) 格子点どうしは x 軸方向や y 軸方向にしか, つながっていないとする (つまり格子点間をななめに移動できず, 格子点間が縦横の道路で結ばれたようなもの). 点 O, A, B のうち移動距離で点 C に最も近い点を求め, その間の移動距離を求めよ.

解答例 例えば点 C と点 O の格子点間の x 軸方向や y 軸方向だけの移動距離を $\|\mathrm{CO}\|$ とかくことにする. $\|\mathrm{CO}\| = 2+2 = 4$, $\|\mathrm{CA}\| = 2+2 = 4$, $\|\mathrm{CB}\| = 2+1 = 3$ より, 点 B が最も近く, その移動距離は 3.