# 位相入門I・自習シート

**問 1**　$A_n \neq \emptyset$ とし, $A_{n+1} \subset A_n$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) と仮定する. 集合 $C_n$ を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad (^\forall n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$C_n \subset C_{n+1} \quad (^\forall n \in \mathbb{N}).$$

(2)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

**解答例**　(1) $\emptyset$ は任意の集合の部分集合になるので $C_1 = \emptyset \subset C_2$. 次に $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ とする. $x \in C_n$ とすると, 定義より

$$x \in A_1 \setminus A_n,$$

つまり, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_n$. このとき, 仮定より $x \notin A_{n+1}$. (もし, そうでないなら $A_{n+1} \subset A_n$ より $x \in A_n$ となってしまうから). ゆえに

$$x \in A_1 \setminus A_{n+1} = C_{n+1}.$$

よって, $C_n \subset C_{n+1}$ が成立する.
(2) ($\subset$) を示す. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ とする. このとき, 和集合の定義より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in C_{n_0}$. ここで $C_1 = \emptyset$ だから $n_0 \geq 2$ であることに注意する. $x \in C_{n_0} = A_1 \setminus A_{n_0}$, つまり $x \in A_1$ かつ $x \notin A_{n_0}$. よって

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

より

$$x \in A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

が得られ ($\subset$) が成立する.
($\supset$) を示す. $x \in A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とする. 差の定義より $x \in A_1$ かつ

$$x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

すなわち, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $x \notin A_{n_0}$. つまり, $x \in C_{n_0} = A_1 \setminus A_{n_0}$. ゆえに

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

が得られ ($\supset$) が成立する.
以上より等号成立. □

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

**問 2**　$X$ を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする．次の 3 条件は同値[1]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

**証明**　「(1) ならば (2)」を示す．(1) を仮定する．任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ を示す．$x \in A$ とする．$A \subset X$ より, $x \in X$ なので (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$ となる．つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし, 今は $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$ しかありえない. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する．背理法で示す．もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, ある元 $x \in A \cap B^c$ が存在する．この元 $x$ は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾．よって $A \cap B^c = \emptyset$.
「(3) ならば (1)」を示す.
($\subset$) を示す. $x \in A^c \cup B$ とする.

(i) $x \in A^c$ のとき, $A^c = X \setminus A \subset X$ より, $x \in X$.

(ii) $x \in B$ のとき, $B \subset X$ より, $x \in X$.

以上より $x \in X$.（$X$ は全体集合なので, つねに $x \in X$ となる.）よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
($\supset$) を示す. $x \in X$ とする.

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる．実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる.　□

**「(3) ならば (1)」の別解**　(3) を仮定する．ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立.　□

**定義**　$f : X \to Y$ とする．$A \subset X$, $B \subset Y$ に対して

$$f(A) := \{y \in Y : {}^\exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\},$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\},$$

と定義し, それぞれ $A$ の ($f$ による) 像, $B$ の ($f$ による) 逆像とよぶ.

[1]「(1) ならば (2)」,「(2) ならば (3)」,「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

**問 3**　$f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X$, $B_\alpha \subset Y$ $({}^\forall \alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ:

(1)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(2)

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

**解答例**　(1) $(\subset)$ を示す. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right)$ とする. 逆像の定義より,

$$f(x) \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

すなわち, 任意の $\alpha \in I$ に対して $f(x) \in B_\alpha$, つまり, $x \in f^{-1}(B_\alpha)$. ゆえに

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

$(\supset)$ を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする. 共通部分の定義より, 任意の $\alpha \in I$ に対して $x \in f^{-1}(B_\alpha)$, つまり逆像の定義より $f(x) \in B_\alpha$. 再び共通部分の定義より

$$f(x) \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$$

なので, 逆像の定義より

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right).$$

以上より等号成立. □

(2) $y \in f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする. 像の定義よりある $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ が存在して $y = f(x)$ だが, $x$ について任意の $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$ がいえる. よって像の定義より

$$y \in f(A_\alpha)$$

が得られ, 共通部分の定義より

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

**注:**　(ii) の逆向きの包含関係は成立しない.