位相入門I・自習シート

問 1　a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**全て**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問 2　$A_\alpha,\ B$ を集合とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ

(1)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

(2)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(3)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

以後, 断りがない限り $\alpha \in I$ を添え字と添え字集合として用いる.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です.

証明　(1) ($\subset$) を示す．$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ とする．共通部分の定義より，$x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. 和集合の定義より，ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$. つまり，$x \in B \cap A_{\alpha_0}$. よって，再び和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha).$$

よって，($\subset$) が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)$ とする．和集合の定義よりある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in B \cap A_{\alpha_0}$. 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in A_{\alpha_0}$. 和集合の定義より $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. よって，再び共通部分の定義より

$$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

よって，($\supset$) が成立する．

以上より等号成立．□

(2) ($\subset$) を示す．$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ とする．$x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$，つまり，ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \notin A_{\alpha_0}$ が成立する (実際，もしそうでないならば，すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$ となるが，そのとき $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ となり矛盾). よって集合の差の定義より，$x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha).$$

よって，($\subset$) が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha)$ とする．和集合の定義より，ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって，$x \in B$ かつ $x \notin A_{\alpha_0}$，つまり $x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ (実際，もしそうでないならば，$x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ となるが，そのときすべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$ となり矛盾). よって

$$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

よって，($\supset$) が成立．

以上より等号成立．□

(3) ($\subset$) を示す．$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ とする．和集合の定義より $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ が成立する．

(i) $x \in B$ のとき，すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in B \cup A_\alpha$. よって，共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ のとき，すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$，つまり $x \in B \cup A_\alpha$. ゆえに，共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha).$$

(i), (ii) より ($\subset$) が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$ とする．共通部分の定義より，すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in B \cup A_\alpha$.

(i) $x \in B$ のとき，$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$.

(ii) $x \notin B$ のとき, すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$. (もしそうでないなら, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して, $x \notin A_{\alpha_0}$ となるが, $x \notin B \cup A_{\alpha_0}$ となり矛盾.) よって $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

(i), (ii) より ($\supset$) が成立する.
以上より等号成立. □

問 3 $I := \mathbb{C}$ とする. $\alpha \in I$ に対して $A_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |\alpha|\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 集合 A_{3+4i}, A_i, A_0 をそれぞれ図示せよ.

解答例 図は略. A_{3+4i} は半径 5 の円, A_i は半径 1 の円, ただし, いずれも境界を含む. A_0 は原点だけからなる集合 $\{(0, 0)\}$.

(2)

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

はどのような集合になるか求めよ (可能ならその等号の証明もせよ).

解答例

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{(0, 0)\}$$

となる. まずは簡単な ($\supset$) を示す. $(x, y) \in \{(0, 0)\}$ とする. つまり $(x, y) = (0, 0)$. このとき, 任意の $\alpha \in I$ に対して,

$$(x, y) \in A_\alpha.$$

(半径 $|\alpha|$ の円に原点が必ず含まれることを意味する). よって共通部分の定期より

$$(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

よって, ($\supset$) が成立する.
($\subset$) を示す. $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ とする. このとき, 共通部分の定義より

$$(x, y) \in A_\alpha \quad ({}^\forall \alpha \in I).$$

つまり, 任意の $\alpha \in I$ に対して

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq |\alpha|.$$

$\alpha \in I = \mathbb{C}$ は任意なので [1], これは $(x, y) = (0, 0)$ を意味する. (例えば以下のように証明できる. $n \in \mathbb{N}$ とし $\alpha := 1/n$ のときも成立する. よって

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq |\alpha| = \frac{1}{n}.$$

---

[1] 何を選んでも成立するという意味.

ここで $n \to +\infty$ とすれば, はさみうちの原理より

$$0 \le x^2 + y^2 \le 0.$$

すなわち, $(x, y) = (0, 0)$. よって $(x, y) \in \{(0, 0)\}$.) よって, $(\subset)$ が成立する.

以上より等号成立. □

定義 X, A を集合とし $A \subset X$ とする. 議論の対象となる元が X の元であり, それを前提とするような場合には差 $X \setminus A$ のことを A^c とかき, A の**補集合**とよぶ場合がある [2], すなわち

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}$$

である. またこのとき, X を全体集合とよぶ.

問 4 [ド・モルガンの法則] X を全体集合とし, $A_\alpha \subset X$(ただし $\alpha \in I$) とする. **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ (例題として, 1 か所だけは証明の例を記載しておく).

(1)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

解答例 (1) $(\subset)$ を示す. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって, すべての $\alpha \in I$ に対して

$$x \notin A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して, $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, その場合 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾.) よって, 補集合の定義より

$$x \in A_\alpha^c,$$

つまり, 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

よって $(\subset)$ が成立する.

$(\supset)$ を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする. 共通部分の定義より, すべての $\alpha \in I$ に対して

$$x \in A_\alpha^c,$$

すなわち

$$x \notin A_\alpha.$$

このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

[2] 上付きの ^{c} は補集合の英語 (complement) からきている. 高等学校では A の補集合を $\overline{A}$ と書いたがこの記号は別の意味に用いたいので今後, 補集合の記号は A^c を用いる.

(実際, もしそうでなければ, $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ より, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, これは矛盾.) ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

よって $(\supset)$ が成立する.

以上より等号成立. $\square$

(2) $(\subset)$ を示す. $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$ とする. 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

(実際, もしそうでなければ, すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$ となるが, その場合 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾.) ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

$(\supset)$ を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする. このとき, ある $\alpha_0 \in I$ が存在して

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

(実際, もしそうでなければ, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ より, すべての $\alpha \in I$ に対して $x \in A_\alpha$ となるが矛盾.) ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

以上より等号成立. $\square$