2024/05/01/No.2

位相入門I・自習シート

問 1　A, B, C を集合とする．**集合の等号の定義に戻って** [1)]

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

を証明せよ．

解答例　($\subset$) を示す．$x \in A \cup (B \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B \cap C$.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ と言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i), (ii) より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$ と言える．よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(ii) $x \notin A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ より $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する．共通部分の定義より $x \in B \cap C$ が成立するので, よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(i), (ii) より $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

以上より等号が成立する．　□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1)] 例えば同値変形による証明としては

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff (x \in A) \lor (x \in B \cap C) \\ &\iff (x \in A) \lor ((x \in B) \land (x \in C)) \\ &\iff ((x \in A) \lor (x \in B)) \land ((x \in A) \lor (x \in C)) \\ &\iff (x \in A \cup B) \land (x \in A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

などが考えられるが, ここではこの事実の理解よりも, 集合の等号の定義に戻った証明の方法の理解が大切なので, 面倒ではあるが証明の等号の定義に戻った証明の書き方に慣れること．

問 2　次の否定を述べよ.
(例)「彼はすべての都道府県を旅した.」

否定　「ある都道府県があって, 彼はその都道府県を旅していない.」
「全ての都道府県を旅していない.」は言い過ぎ.

(1)「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えた.」

否定　「どの年も数理の人数は 100 人を超えていない.」
「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えていない.」では足りない.

(2)「ある講義があって, その講義は龍大のすべての学生が受講している.」

否定　「どのような講義に対しても, ある龍大生がいて, その講義を受講していない.」

(3)「位相入門を受講しているすべての学生に対してある B リーグのチームがあって, その学生はそのチームが好きだ.」

否定　「位相入門を受講しているある学生がいて, どの B リーグのチームもその学生は好きではない.」

問 3　実数の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(0) ${}^\forall x \in E,\ x \leq a.$

(1) ${}^\exists x_1 \in E$ s.t. $x_1 \geq b.$

(2) ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in E,\ x \leq K.$

(3) ${}^\forall x \in E,\ {}^\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $x \geq a.$

(4) $a \in \mathbb{R} \setminus E.$

解答例　(0)「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$」の否定なので,「ある (特別な)$x_0 \in E$ が存在して, 反例となる」つまり

$${}^\exists x_0 \in E \quad \text{s.t.} \quad x_0 > a.$$

(1)「ある $x_1 \in E$ が存在して $x_1 \geq b$」の否定なので,「任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ」, つまり

$${}^\forall x \in E,\ x < b.$$

英語の文章の流れにあわせて

$$x < b\ ({}^\forall x \in E) \qquad (x < b \text{ for all } x \in E \text{ のこと})$$

と書いてもよい.
(2)「ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」の否定なので「任意の

$K \in \mathbb{R}$ に対して，『任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$』の部分が否定される」．つまり，「任意の $K \in \mathbb{R}$ に対してある $x_K \in E$ が存在して $x_K > K$」ということなので

$$^{\forall}K \in \mathbb{R}, ^{\exists}x_K \in E \quad \text{s.t. } x_K > K.$$

(3) 「任意の $x \in E$ に対してある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $x \geq a$」の否定なので「ある (特別な)$x_0 \in E$ が存在して, 反例となる」つまり

$$^{\exists}x_0 \in E \quad \text{s.t. } ^{\forall}a \in \mathbb{R}, x_0 < a.$$

(4) 「$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$」の否定なので「$a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので

$$a \in E.$$

注　(2) や (3) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには, 例えば (2) なら

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R} \boxed{\forall x \in E \boxed{x \leq K}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg \boxed{\exists K \in \mathbb{R} \boxed{\forall x \in E \boxed{x \leq K}}}$$

を

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R} \boxed{\exists x_K \in E \boxed{x_K > K}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の箱「命題」の否定によって求め, 必要に応じてあらためて $^{\forall}K \in \mathbb{R}$, $^{\exists}x_K \in E$ s.t. $x_K > K$ と否定を機械的に得ることもできる．(3) なら

$$\boxed{\forall x \in E \boxed{\exists a \in \mathbb{R} \boxed{x \geq a}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg \boxed{\forall x \in E \boxed{\exists a \in \mathbb{R} \boxed{x \geq a}}}$$

を

$$\boxed{\exists x_0 \in E \boxed{\forall a \in \mathbb{R} \boxed{x_0 < a}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の箱「命題」の否定によって求め, 必要に応じてあらためて $^{\exists}x_0 \in E$ s.t. $^{\forall}a \in \mathbb{R}, x > a$ と否定を機械的に得ることもできる．