2024/07/09/No.12

位相入門 II・自習シート

問 1　$A \subset \mathbb{R}^2$ とし, $B \subset \mathbb{R}^2$ を $B \subset A$ を満たす任意の開集合とする．このとき, $B \subset A^i$ を証明せよ [1)]

証明　$B \subset \mathbb{R}^2$ を $B \subset A$ を満たす任意の開集合とする．$B \subset A^i$ を示す．$x \in B$ とする．B は開集合なので ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A$ なので,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

といえる．つまり, x は A の内点である．よって, $x \in A^i$．つまり, $B \subset A^i$．□

別解　仮定より $B \subset A$ で, 内部の性質より $B^i \subset A^i$ が得られる．さらに B は開集合なので同値性から $B^i = B$ が得られるので $B = B^i \subset A^i$ が示される．

問 2　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることを証明せよ．

証明　$B \subset \mathbb{R}^2$ を $A \subset B$ を満たす任意の閉集合とする．このとき, $\overline{A} \subset B$ を示すことで, $\overline{A}$ が A を含む閉集合の中で最小であることを示す．そこで, 対偶に相当する $B^c \subset (\overline{A})^c$ を示す．$x \in B^c$ とする．B は閉集合なので B^c は開集合である．よって ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset B^c.$$

ここで, $A \subset B$ なので $A^c \supset B^c$ から,

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A^c$$

といえる．つまり, x は A の外点である．よって, $x \in A^e$．$(\overline{A})^c = A^e$ なので $x \in (\overline{A})^c$, つまり,

$$B^c \subset (\overline{A})^c$$

が成立する．これより $\overline{A} \subset B$ が成立する．

まとめると, A を含むどのような閉集合 B をえらんできても, $\overline{A} \subset B$ となるので, $\overline{A}$ が閉集合 (補集合が開集合) であることから, $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であるといえる．□

問 3　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．次の (i) と (ii) は同値であることを**問 2 の結果を用いて**証明せよ．

(i) A は閉集合;

(ii) $\overline{A} = A$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

1) この主張は「A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合である」ことを意味している．言い換えると「A に含まれる開集合の中で A^i よりも大きなものは存在しない」ということを意味している．

証明　(i) ならば (ii) を示す．A を閉集合とする．$\overline{A}$ の定義より $\overline{A} \supset A$ は常に成り立つ．一方, 問 2 より $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合なので, A 自身が閉集合であると仮定しているので $\overline{A} \subset A$ を得る (閉集合どうしの比較)．以上より $\overline{A} = A$.

(ii) ならば (i) を示す．$\overline{A} = A$ を仮定する．問 2 より閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることが分かっているので, これは A が閉集合であることを意味する．よって成立．　$\square$