位相入門II・自習シート

問 1　次の集合 A, B についてそれぞれ, 内部, 外部がどのような集合になるか求めよ. 証明する必要はない.

$$A = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}, \quad B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$A^i = (0,1), \quad A^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$

$$B^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$B^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\}.$$

問 2　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次を証明せよ.

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

証明　($\subset$) を示す. $x \in (A \cap B)^i$ とする. 内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である. よって $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

といえる. これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

($\supset$) を示す. $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$. 内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $^\exists \varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

となり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x \in (A \cap B)^i.$$

以上より等号が成立. □

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 3　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする．次を証明せよ．
(i) $A^i \cap A^e = \emptyset$.
(ii) $B \subset A$ ならば, $B^i \subset A^i$.

証明　(i) 背理法で示す．$A^i \cap A^e \neq \emptyset$ と仮定すると, $x \in A^i \cap A^e$ がとれる．$x \in A^i$ かつ $x \in A^e$ だが, $A^i \subset A$, $A^e \subset A^c$ より $x \in A$ かつ $x \in A^c$ となり矛盾. $\square$
(ii) $B \subset A$ と仮定する．$B^i \subset A^i$ を示す．$x \in B^i$ とする．内部の定義より x は B の内点なので, $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

がいえるが, 仮定 $B \subset A$ より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

までいえて, x に対して A に含まれるように半径 $\varepsilon_x > 0$ の ε-近傍がとれたことになる．つまり点 x は A の内点であることが示された．よって $x \in A^i$ となり, $B^i \subset A^i$. $\square$

問 4　$A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 次の命題「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶を論理記号で書け.

(2) 命題「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」を証明せよ.

解答例　(1) 「P ならば Q」の対偶は「Q でないならば P でない」である．よって「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶は「$x \in A^e$ ならば $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」となる.
(2) 対偶を示す．すなわち「$x \in A^e$ ならば $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」を示せばよい. $x \in A^e$ とすると外部の定義より, 点 x は A の外点なので $^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \subset A^c$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$.