

位相入門II・自習シート

問1 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ とし, $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ を仮定する. 開長方形 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は開集合であることを証明せよ. なお, 開長方形とは

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$$

で定義される.

解答例 $U := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ とおく. $\forall x \in U, \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon) \subset U$$

を示せばよい. そこで $x \in U$ とすると

$$a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2$$

いま,

$$\varepsilon_x := \min\{x_1 - a_1, b_1 - x_1, x_2 - a_2, b_2 - x_2\}$$

とおくと上の不等式より $\varepsilon_x > 0$ である. このとき $N(x; \varepsilon) \subset U$ が成立する. 実際, $\forall y \in N(x; \varepsilon_x)$ に対して,

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

より

$$x_1 - y_1 \leq |x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(x, y) = d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_1 - a_1,$$

$$y_1 - x_1 \leq |y_1 - x_1| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq b_1 - x_1,$$

$$x_2 - y_2 \leq |x_2 - y_2| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_2 - a_2,$$

$$y_2 - x_2 \leq |y_2 - x_2| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq b_2 - x_2$$

が成立する. よって,

$$a_1 < y_1 < b_1, \quad a_2 < y_2 < b_2.$$

つまり $y = (y_1, y_2) \in U$. 以上より開長方形 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は開集合. □

問2 (X, d) として (\mathbb{R}, d) を考える. ただし, $d(x, y) := |x - y|$. また $n \in \mathbb{N}$ とし,

$$U_n := \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

とおく. 次を証明せよ.

(1) U_n は開集合であることを証明せよ.

(2) 集合の等号の定義に従って次を証明せよ.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1].$$

(3) 開集合の可算共通部分は必ずしも開集合とはならないことを証明せよ. ただし, $(0, 1]$ は開集合ではないことを用いてもよい.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例 (1) $\forall x \in U_n, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_n$$

を示す. $x \in U_n$ とする. このとき

$$0 < x < 1 + \frac{1}{n}$$

を満たす. よって, $\varepsilon_x := \min\{x, 1 + 1/n - x\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ でさらに

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_n$$

が成立する. 実際, $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とおくと, ε -近傍の定義より

$$d(x, y) = |x - y| < \varepsilon_x,$$

つまり $-\varepsilon_x < x - y < \varepsilon_x$. よって

$$x - y < \varepsilon_x \leq x,$$

$$x - y > -\varepsilon_x \geq -\left(1 + \frac{1}{n} - x\right)$$

より $y > 0$ と $y < 1 + 1/n$ が得られ, $y \in U_n$ を満たす. 以上より U_n は開集合である.

(2) (C) を示す. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ とする. このとき共通部分の定義より $\forall n \in \mathbb{N}, x \in U_n$, つまり

$$0 < x < 1 + \frac{1}{n}.$$

$n \rightarrow +\infty$ とすれば

$$0 < x \leq 1$$

すなわち, $x \in (0, 1]$.

(D) を示す. $x \in (0, 1]$ とする. このとき, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n},$$

すなわち, $x \in U_n$. よって共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

以上により等号成立.

(3) (2) より, $(0, 1]$ は開集合ではないので, 開集合の可算共通部分は必ずしも開集合とはならない.