位相入門I・自習シート

問 1 「帰納的推論」と「演繹的推論」の定義を調べよ．さらに次の推論はこれらのどちらに該当するか答えよ．

解答例　Wikipedia によると「帰納」とは「個別的・特殊的な事例から一般的・普遍的な規則・法則を見出そうとする論理的推論の方法のこと」，「演繹」とは「一般的・普遍的な前提から, より個別的・特殊的な結論を得る論理的推論の方法である」とあるので, これを利用すれば

「帰納的推論」とは例えば「個別的・特殊的な事例から一般的・普遍的な規則・法則を見出そうとする推論の方法のこと」
「演繹的推論」とは例えば「一般的・普遍的な前提から, より個別的・特殊的な結論を得る推論の方法のこと」

といえる．

広辞苑 (第 3 版) によると「帰納」とは「個々の具体的事実から一般的な命題ないし法則を導き出すこと．特殊から普遍を導き出すこと」，「演繹」とは「前提された命題から, 経験にたよらず, 論理の規則に従って必然的な結論を導き出す思考の手続き」とあるので, これを利用すれば

「帰納的推論」とは例えば「個々の具体的事実から一般的な命題ないし法則を導き出す推論の方法のこと」
「演繹的推論」とは例えば「前提された命題から, 経験にたよらず, 論理の規則に従って必然的な結論を導き出す推論の方法のこと」

といえる．

(1) 三角形の内角の和が 180° であること, 紙で三角形をつくり, 3 つの角を切り抜き一直線に並べて確かめる．
(2) 4 つの角がすべて等しい四角形は 2 組の向かいあう角が等しい四角形であるので, 向かい合う 2 組の辺はそれぞれ平行である．よって, 長方形は平行四辺形であると推論する．
(3) 数学的帰納法

よって, (1) は「帰納的推論」, (2) や (3) は「演繹的推論」である．大雑把に言えば「帰納的推論」は「その推論の方法ではひょっとしたら例外があるかもしれない」という推論だと言えるし, 「演繹的推論」は「その推論の方法なら例外なく必ず正しい」という推論だと言える．「数学的帰納法」という言葉につられて「帰納的推論」と考えてはいけない．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

「数学的帰納法」はその証明の方法が帰納的にみえるため, その名称になっているが「数学的」とついているように, この推論は「演繹的推論」である. そのような理由からも「数学的帰納法」を「帰納法」と略してしまわない方がよい.

定義 A, B を集合とする. 2 つの集合 $A \cup B$, $A \cap B$ をそれぞれ次のように定義する:

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\},$$
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

それぞれ A と B の和集合, A と B の共通部分とよぶ.

問 2 A, B, C を集合とする. 集合の等号の定義に従い次を証明せよ.

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

解答例 $(\subset)$ を示す. $x \in A \cap (B \cup C)$ とする. 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$, すなわち $x \in B$ または $x \in C$ が和集合の定義より成立する.

(i) $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので $x \in A \cap B$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cap C$ である. ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$(\supset)$ を示す. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする. 和集合の定義より $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する.

(i) $x \in A \cap B$ のとき, 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in B \cup C$ である. ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上より, $(\subset)$ と $(\supset)$ が証明されたので等号が成立する. $\square$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

解答例 ($\subset$) を示す．$x \in A \cup (B \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B \cap C$.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cap C$ と言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i), (ii) より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$ と言える．よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(ii) $x \notin A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ より $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する．共通部分の定義より $x \in B \cap C$ が成立するので, よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(i), (ii) より $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する． $\square$

注意 1 「(1) 任意の $x \in A$ に対して, 」「(2) ${}^\forall x \in A$ に対して,」「(3) ${}^\forall x \in A$,」や「(4) $x \in A$ とする.」の書き出しの違いについて．$^\forall$ の記号は「for all」という言葉の省略形であり, (2) は「for all $x \in A$, 」という英語, つまり (1) の「任意の $x \in A$ に対して, 」という意味で用いている．(2) については揚げ足をとると「『任意の $x \in A$ に対して』に対して」のように二重になっていると言えなくもないが, 書き手の好みで (2) もしくは (3) を用いることがある．ここでは, (1), (2), (3) の最後がピリオドではなくコンマであることに注意してほしい．これらはまだ文章が続いているのである．実際

任意の $x \in A$ に対して, $\underline{P(x) \text{ が成立する.}}$
For all $x \in A$, the condition $P(x)$ holds.
The condition $P(x)$ holds for all $x \in A$.

のように x に関する条件 $P(x)$ が続く場合に「任意の〜に対して」や「$\forall$」を用いることが多い．逆に, 条件 $P(x)$ がすぐに現れない場合には, (4) のように「$x \in A$ とする.」と一度文章を区切る方がスマートである．つまり「任意の $x \in A$ とする」や「$\forall x \in A$ とする」という表現はやや不自然で（そのように書く人も多々いるが），「$x \in A$ とする.」もしくは任意性を強調したいならば「任意に $x \in A$ をとる.」と書いた方が自然である.

注 2　テキストに書かれているような同値変形による証明を否定しているわけではない. シンプルに書かれている証明 (あるいみコード) が何を言っているかが分かるように書き直しただけである．また証明すべき命題がより複雑になった場合 (位相入門 I の後半や位相入門 II), 同値変形による証明はもはや通用しなくなる．そのときのための証明の練習を易しい命題で行っていると考えましょう.