2024/07/19

位相入門II・補助シート

位相入門Iの07/18で扱った「コンパクト」について勘違いしている人が多いので補助プリントを用意しました.

定義　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A が次の条件を満たすとき, A はコンパクトであると定義する: A の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, すなわち $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は開集合の族で

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を満たすものに対して, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\lambda_k}.$$

格好つけていうと「A の任意の開被覆に対して, 有限開被覆が存在するとき A をコンパクトという」といえます.

理解で躓く点をいくつか示しながら解説を続けます.

(1) 開集合の族

集合 U_λ それぞれが $\mathbb{R}^2$ の開集合で, その開集合たちの集合

$$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

のことです.

(2) $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ が存在して

添え字集合 Λ から有限個 (この場合 n 個) を選び出しています.

(3) A の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

次のようなお話を考えましょう.

「ある人 A が次の条件を満たすとき A は名探偵であると定義する: A に襲いかかるありとあらゆる (任意の) 事件 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$(ここで事件は $\{U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots\}$ のように無限個の問題たち U_i で構成されています) に対して, 必ず鍵となる有限個の問題 U_{λ_1}, U_{λ_2}, $\ldots, U_{\lambda_n}$ に絞り込むことができて問題を解決してしまう」.

事件 a : $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$　　この事件 a の鍵となる問題は U_1 と U_3 と U_5 だけだ!

つまり $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ のように $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \Lambda = \mathbb{N}$ が選べる.

事件 b : $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$　　この事件 a の鍵となる問題は V_1 だけだ!

つまり $\lambda_1 = 1$ のように $\{\lambda_1\} \subset \Lambda = \mathbb{N}$ が選べる.

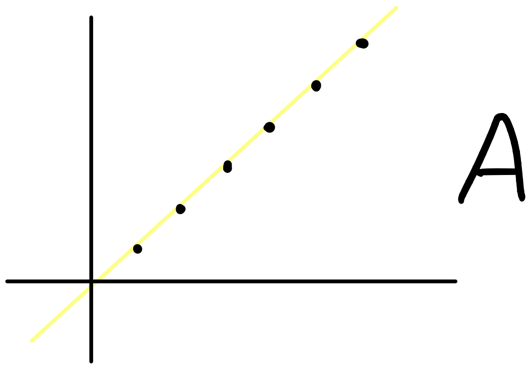
事件 c : $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$　　この事件 a の鍵となる問題は W_{11} から W_{20} までだけだ!

つまり $\lambda_1 = 11$ $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 13$, $\ldots, \lambda_{10} = 20$ のように $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{10}\} \subset \Lambda = \mathbb{N}$ が選べる. ここで, A が名探偵かどうかは, **たまたま1つの事件**を解決しただけでは判定できないことに注意が必要です. ありとあらゆる**任意の事件**についてチェックせねばなりません.

講義で扱ったコンパクトでない集合の例をまねて $\mathbb{R}^2$ の例を考えてみます:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \in \mathbb{N}\}$$

つまり第 1 象限に伸びる直線 $y = x$ 上の自然数の対 (格子点) 全体の集合です.



講義では第 1 象限

$$V_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

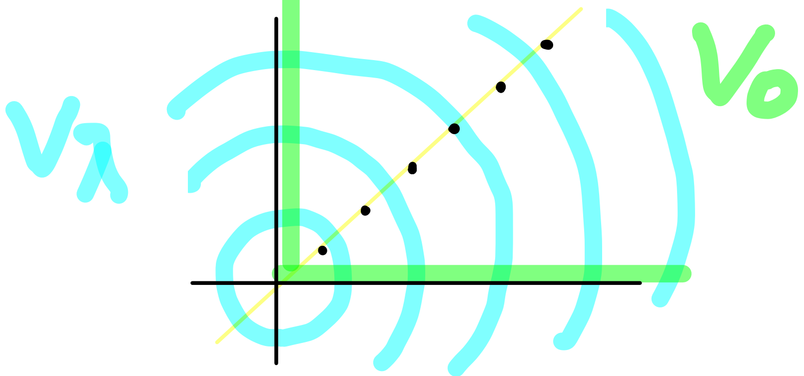
は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明済みです. そこで, $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ として, Λ を 0 以上の実数 $\Lambda := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ とおき, $\lambda > 0$ に対しては原点中心, 半径 λ の円の内側

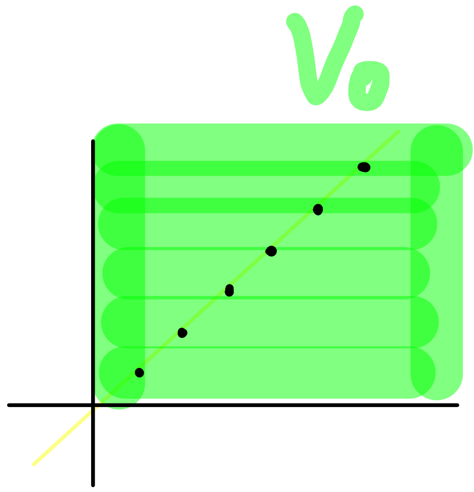
$$V_\lambda := N(0; \lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \lambda\}$$

とおいてみましょう. このとき

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

が成立しているので $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は A の **1 つの開被覆です**.





このうち, 第 1 象限 V_0 だけで A を覆い尽くすことができるので $\lambda_1 = 0$ とおけば

$$A \subset V_0 = \bigcup_{k=1}^{1} V_{\lambda_k}$$

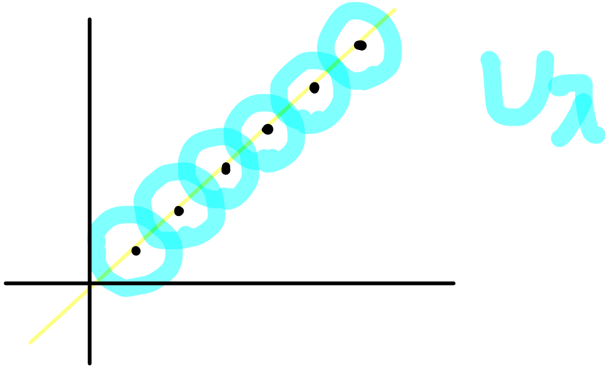
と有限開被覆が選べたことになります. **ただし, たまたま 1 つの開被覆に対して有限開被覆が選べただけでは A がコンパクトかどうか判定することはできません. ありとあらゆる任意の開被覆についてチェックせねばなりません**. 実際, 別の開被覆として $\Lambda = \mathbb{N}$ とおき,

$$U_\lambda := N(\lambda; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 < 1\}$$

とおくと, A のすべての点は, どれかの ε-近傍 $N(\lambda;1)$ に含まれるため,

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が成立しているので $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は A の **1 つの開被覆です**.



しかし, どの $N(\lambda;1)$ も欠けてしまうと, 覆えなくなる点が出てきてしまうので, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ には A の有限開被覆は存在しません. つまり A はコンパクトではないということが分かります.