

## 位相入門II・補助シート

位相入門Iの初回06/06の最後に解いた問題について質問が多かったので、自習シートを解くためにも再び解説します。青い箇所は誤植の修正箇所です。

問 第1象限  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  は  $\mathbb{R}^2$  の開集合である。

証明  $U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  とおく。  $U$  が開集合の定義を満たすことを示す。つまり

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示す。

$x = (x_1, x_2) \in U$  とする。

$$\varepsilon_x := \min\{x_2, x_1\}$$

とおく。つまり、点  $x$  と  $x$ -軸、 $y$ -軸までの距離で小さい方とする。

Q1: なぜ  $x_2$  と  $x_1$  の順番なのですか?

A: 解説する際に「点  $x = (x_1, x_2)$  の  $x$ -軸との距離は  $x_2$  です。点  $x$  の  $y$ -軸との距離は  $x_1$  です」とその順番で解説したので、登場順に  $x_2, x_1$  の小さい方としました。

Q2:  $\min\{x_1, x_2\}$  の順番でもいいですか?

A: もちろんいいです。  $\min\{x_2, x_1\} = \min\{x_1, x_2\}$  です。

このとき

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である。実際、 $y = (y_1, y_2) \in N(x; \varepsilon_x)$  とすると、 $\varepsilon_x$ -近傍の定義から

$$d(y, x) < \varepsilon_x.$$

よって、

$$x_1 - y_1 \leq |y_1 - x_1| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_1.$$

Q3: なぜそう言えますか?

A: 不等式1つ1つ詳しく解説します。まず

$$x_1 - y_1 = -(y_1 - x_1) \leq |y_1 - x_1|$$

です。次に

$$|y_1 - x_1| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} \leq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y, x)$$

です。  $\min$  の定義から

$$\varepsilon_x \leq x_1$$

です。なぜなら、 $x_1 \leq x_2$  のとき

$$\varepsilon_x = \min\{x_1, x_2\} = x_1$$

であり,  $x_1 > x_2$  のとき

$$\varepsilon_x = \min\{x_1, x_2\} = x_2 < x_1$$

なので,  $\varepsilon_x = x_1$  または  $\varepsilon_x > x_1$ , つまり

$$\varepsilon_x \leq x_1$$

です.

よって

$$-y_1 < 0.$$

つまり,  $y_1 > 0$ .

Q4: なぜそう言えますか?

A:  $x_1 - y_1 < x_1$  の両辺から  $x_1$  を引くと,  $-y_1 < 0$  です. つまり  $y_1 > 0$  です.

同様に  $y_2 > 0$ . つまり  $(y_1, y_2) \in U$ .

Q5: なぜそう言えますか?

A:  $U$  は第1象限の集合です. つまり  $y = (y_1, y_2) \in U$  を示すには  $y_1 > 0$  かつ  $y_2 > 0$  を示せばいいからです.

以上より第1象限  $U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  は  $\mathbb{R}^2$  の開集合である. □

Q6: なぜそう言えますか?

A: 任意の  $y \in N(x; \varepsilon_x)$  について,  $y \in U$  が示せました. これが

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

の定義だからです (1Q の内容).