令和5年度 位相入門I 小テスト No.1

____________ 課程 ____________ 年生　学籍番号 ____________ 名前 ________________________

$\boxed{1}$ A, B, C を空でない集合とする．集合の等号の定義に従って

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を証明せよ．

$\boxed{2}$ A_α, B を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合．このとき

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

を集合の包含関係の定義に従って証明せよ．

$\boxed{3}$ X, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合．このとき

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

を集合の等号の定義に従って証明せよ．ただし, A^c とは A の補集合で, $A^c := X \setminus A$ で定義されるものとする．

$\boxed{4}$ $f : X \to Y$ とし, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合．このとき

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を集合の包含関係に従って証明せよ．

令和5年度 位相入門I 小テスト No.2

__________ 課程 __________ 年生　学籍番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{5}$ 次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，「全射」，「単射」，「全単射」，「いずれでもない」かを判断し, 最も適切なものを選び答えよ．(「全単射」な関数を「全射」と答えた場合には不正解という意味. つまり「全射」は「全射ではあるが単射ではない」という意味で用いること.)

(1) $f(x) = x^2$,　　　　(ただし, 定義域は $x \geq 0$).

(2) $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

(3) $f(x) = x^3$.

(4) $f(x) = \cos x$.

$\boxed{6}$ $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a \in \mathbb{R}$ とする．次の命題の否定を論理記号で書け.

(1) ${}^{\exists}K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall}x \in E$, $x \leq K$.

(2) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\boxed{7}$ 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{n}$

(2) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

$\boxed{8}$ $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_2(a, b) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

と定義する (L^2 距離). 次の問いに答えよ.

(1) $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$, $d_1(b, c)$, $d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

(2) d_2 は $\mathbb{R}^2$ の距離であることを示せ.