令和6年度 集合と論理3Q 小テスト対策

＿＿＿＿＿ 課程 ＿＿＿＿＿ 回生 学籍番号 ＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ p, q, r を命題とする．同値の定義に従って真理値表を用いて次を証明せよ．ただし，I は恒真命題を意味する．

(1) $p \equiv \neg(\neg p)$

(2) $p \vee I \equiv I$

(3) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

(4) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

(5) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(6) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

(1) $p \equiv \neg(\neg p)$ を示す．

p	$\neg p$	$\neg(\neg q)$
1	0	1
0	1	0

以上により，真理値が一致するので同値である．

(2) $p \vee I \equiv I$ を示す．

p	I	$p \vee I$
1	1	1
0	1	1

以上により，真理値が一致するので同値である．

(3) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ を示す．

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

以上により，真理値が一致するので同値である．

(4) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示す．

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

以上により，真理値が一致するので同値である．

(5) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示す．

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

以上により，真理値が一致するので同値である．

(6) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ を示す．$p \to q$ の定義は $\neg p \vee q$ であることに注意する．

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg q$	$\neg(\neg q)$	$\neg(\neg q) \vee \neg p$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1

以上により，真理値が一致するので同値である．

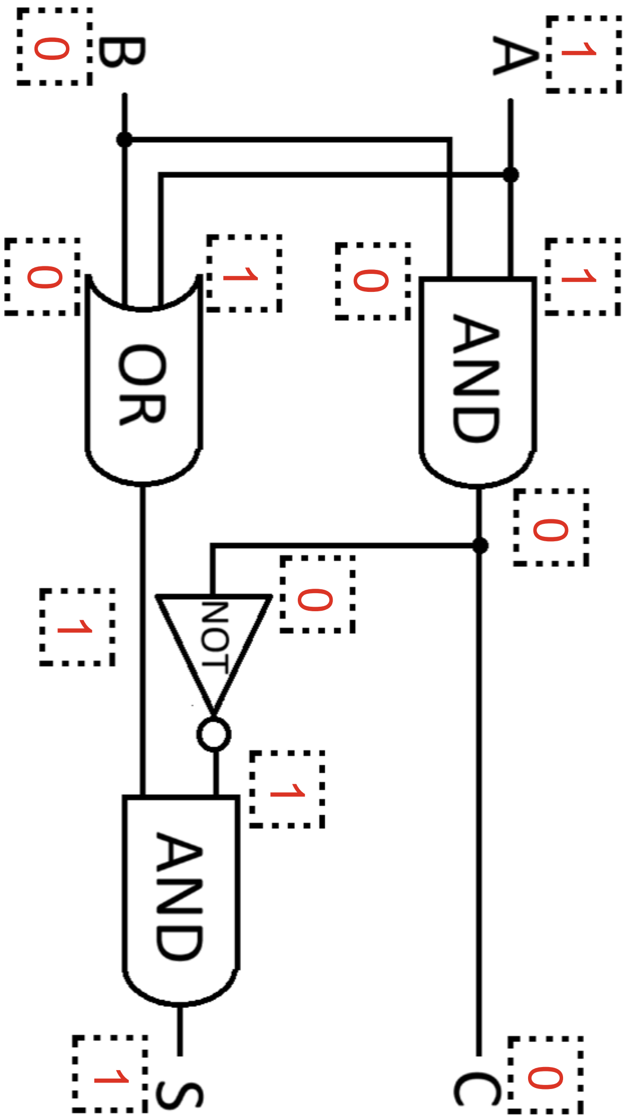
注: $p \to q$ の定義は $\neg p \vee q$ であることに注意すると，(1) より $\neg(\neg q) \equiv q$ なので $\neg q \to \neg p$ の定義は $q \vee (\neg p)$ である．よって，もはや真理値表を用いなくとも，

$$\neg p \vee q \equiv q \vee (\neg p)$$

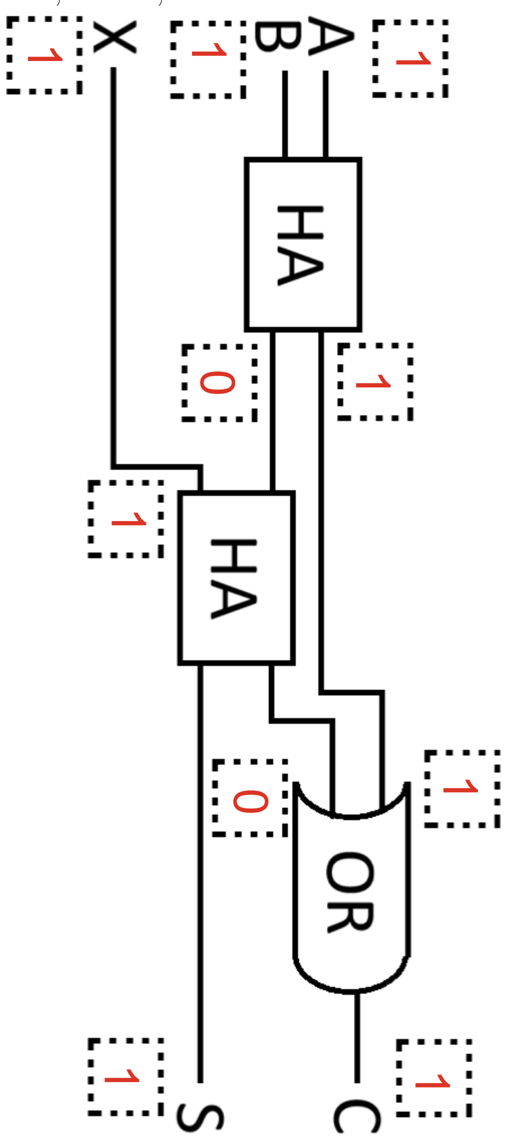
より，同値であると示すことができる (真理値表を使っているのは (1) の証明を再び行っていることと等しい)．ただし，ここでは「真理値表を用いて」という指示があるのでそれに従う．

$\boxed{2}$ 次の半加算器, 全加算機の点線の枠に 0 または 1 を入れて計算を完成させせよ. ただし, (1) の回路を HA と略す.

(1) $A = 1,\ B = 0$



(2) $A = 1,\ B = 1,\ X = 1$



$\boxed{3}$ 次の命題の真偽を調べ正しいほうに丸をつけよ.

(1) ${}^{\forall}z \in \mathbb{Z},\ z \geq 0.$ 真・偽
偽

(2) ${}^{\exists}M > 0$ s.t. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ |n^2| \leq M.$ 真・偽
偽

(3) ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon,\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon.$ 真・偽
真

(4) ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon,\ n^2 < \varepsilon.$ 真・偽
偽

$\boxed{4}$ 次の命題の否定命題を答えよ. ただし, $a_n, \alpha \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である.

(1) ${}^{\exists}r \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall}x \in (0,1),\ x \leq r.$

(2) ${}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}m \in \mathbb{Z}$ s.t. $n < m.$

(3) ${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists} N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \geq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$

(4) ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0$ s.t.
${}^{\forall}x, a \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

(1) ${}^{\forall}r \in \mathbb{R}, {}^{\exists}x \in (0,1)$ s.t. $x > r.$
(2) ${}^{\exists}n \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}m \in \mathbb{Z}, n \geq m.$
(3) ${}^{\exists}\varepsilon > 0$ s.t. ${}^{\forall}N \in \mathbb{N}, {}^{\exists}n \geq N$ s.t. $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon.$
(4) ${}^{\exists}\varepsilon > 0$ s.t. ${}^{\forall}\delta > 0, {}^{\exists}x, a \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta$ s.t.
$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$