

集合と論理・自習シート

問1 $f: X \rightarrow Y$, $B_\alpha \subset Y$ とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ:

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right).$$

問2 次で定義される $f: X \rightarrow Y$ は

- (a) 「全射であるが単射でない」
- (b) 「単射であるが全射でない」
- (c) 「全単射」
- (d) 「どちらでもない」

のいずれに該当するか答えよ.

- (1) $X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$.
- (2) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
- (3) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
- (4) $X = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$.
- (5) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

問3 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ とし, さらに $h: X \rightarrow Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$

と定義する (合成写像). (1) と (2) を証明せよ.

- (1) h が単射であれば, f も単射である.
- (2) h が全射であれば, g も全射である.

問4 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する¹⁾. このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ.

¹⁾ 提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とは $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ のこと.