集合と論理・自習シート

問 1　X を集合とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. 次を証明せよ:

(1) $a \in X$ ならば $a \in C(a)$.

(2) $X = \bigcup_{a \in X} C(a)$.

(3) $a \sim b$ ならば $C(a) = C(b)$.

(4) $a \not\sim b$ ならば $C(a) \cap C(b) = \emptyset$.

解答例　(1) $a \in X$ とする. $a \sim a$ より $a \in C(a)$. □

(2) ($\subset$) を示す. $x \in X$ とする. (1) より $x \in C(x)$ であるので, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{a \in X} C(a).$$

よって ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in \bigcup_{a \in X} C(a)$ とする. 和集合の定義より. $^{\exists}a_0 \in X$ s.t.

$$x \in C(a_0).$$

同値類の定義より $x \in X$(かつ $x \sim a_0$). よって ($\supset$) が成立.

以上より等号成立. □

(3) $a \sim b$ とする. ($\subset$) を示す. $x \in C(a)$ とする. 同値類の定義より, $x \in X$ かつ $x \sim a$. $a \sim b$ より $x \sim b$. すなわち, $x \in C(b)$. よって ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in C(b)$ とする. 同値類の定義より, $x \in X$ かつ $x \sim b$. $a \sim b$ より $b \sim a$ なので $x \sim a$. すなわち, $x \in C(a)$. よって ($\supset$) が成立.

以上より等号成立. □

(4) $a \not\sim b$ とする. 背理法で示す. $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ と仮定すると, ある $x \in X$ が存在して

$$x \in C(a) \cap C(b).$$

つまり共通部分の定義より $x \in C(a)$ かつ $x \in C(b)$. 同値類の定義より $x \sim a$ かつ $x \sim b$ つまり $a \sim x$ より, $a \sim b$ となり仮定に矛盾する. すなわち, $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ が成立する. □

問 2　$X := [0,1]$, $Y := [0,1)$ とする. 次で定義される関数 $f : X \to Y$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \left(x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \text{ のとき}\right), \\ x & \left(x \neq \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \text{ のとき}\right), \end{cases}$$

は全単射であることを証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　まず全射であることを示す．つまり $f([0,1]) = [0,1)$ を示せばよい．$(\subset)$ を示す．$y \in f([0,1])$ とする．像の定義より ${}^\exists x \in [0,1]$ s.t. $y = f(x)$.

(i) ${}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x = 1/n$ のとき, f の定義から $f(x) = 1/(n+1)$ より $0 < y < 1/2$ なので $y \in [0,1)$.

(ii) そうでないとき, f の定義から $y = x$ だが, $x \neq 1$ より $0 \leq y < 1$ なので $y \in [0,1)$.

以上により $y \in [0,1)$. $(\subset)$ が成立.
　$(\supset)$ を示す．$y \in [0,1)$ とする．

(i) ${}^\exists m \in \mathbb{N}$; $m \geq 2$ s.t. $y = 1/m$ のとき, $n := m-1$ とおくと $n \in \mathbb{N}$. よって, $x := 1/n$ とおけば $x \in [0,1]$ でさらに
$$y = \frac{1}{m} = \frac{1}{n+1} = f(x).$$
よって, 像の定義より $y \in f([0,1])$.

(ii) そうでないとき, $x := y$ とおくと, $x \in [0,1]$ でさらに
$$y = x = f(x).$$
よって, 像の定義より $y \in f([0,1])$.

以上により $y \in f([0,1])$. $(\supset)$ が成立.
　以上より等号成立．つまり $f : X \to Y$ は全射である．
　次に単射であることを示す．$x_1, x_2 \in [0,1]$ とする．$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を示せばよい．対偶をとって $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ を示す．$f(x_1) = f(x_2)$ とする．f の定義より f の値は分子が 1 の有理数かそれ以外かで場合分けされる．よって $f(x_1)$ と $f(x_2)$ がともに分子が 1 の有理数か, ともにそうではないときだけを考えればよい．

(i) ${}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t.
$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{n+1}$$
のとき, f の定義より $x_1 = 1/(n+1)$, $x_2 = 1/(n+1)$ となり $x_1 = x_2$.

(ii) そうでないとき, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ でさらに, $f(x_1) = f(x_2)$ より $x_1 = x_2$.

以上より $f : X \to Y$ は単射.
　つまり $f : X \to Y$ は全単射である．　□