集合と論理・自習シート

問 1　$f: X \to Y$, $B_\alpha \subset Y$ とする．ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である．次を証明せよ:

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right).$$

証明　$x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする．和集合の定義より, ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in f^{-1}(B_{\alpha_0}).$$

このとき, 逆像の定義より $f(x) \in B_{\alpha_0}$．よって, 和集合の定義より

$$f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

再び, 逆像の定義より

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right).$$

よって $(\subset)$ が成立する．　□

問 2　次で定義される $f: X \to Y$ は

(a) 「全射であるが単射でない」
(b) 「単射であるが全射でない」
(c) 「全単射」
(d) 「どちらでもない」

のいずれに該当するか答えよ．

(1) $X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$.

(2) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(3) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

(4) $X = [0, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$.

(5) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

解　(1) は (c), (2) は (b), (3) は (d), (4) は (a) である．(5) は (2) と同じように見えるが, 値域が $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に絞られたため, Y の任意の値 y に対して, ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ を満たすので全射になる．単射でもあるので, すなわち (5) は (c) である．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

問 3　$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とし, さらに $h : X \to Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$

と定義する (合成写像). (1) と (2) を証明せよ.

(1) h が単射であれば, f も単射である.

解答例　背理法で示す. もし f が単射でないならばある $x_1, x_2 \in X$ で $x_1 \neq x_2$ が存在して

$$f(x_1) = f(x_2).$$

このとき, $g : Y \to Z$ は写像なので $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ を満たす, つまり

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

となり, h が単射であることに矛盾する. よって f は単射である. $\square$

(2) h が全射であれば, g も全射である.

解答例　$g(Y) = Z$, すなわち, $g(Y) \subset Z$ かつ $g(Y) \supset Z$ を示せばよい. 像の定義から $g(Y) \subset Z$ は常に成り立つ. 次に $g(Y) \supset Z$ を示す. $z \in Z$ とする. h が全射より $h(X) = Z$ なので ${}^{\exists}x \in X$ s.t.

$$z = h(x).$$

このとき, $f : X \to Y$ より $y = f(x)$ とおくと $y \in Y$ を満たす, つまり

$$z = h(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となり, $g(Y) \supset Z$ が証明できたので, $g(Y) = Z$, すなわち g は全射である. $\square$

問 4　$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する [1]. このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ.

解答例　まず全射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ を示す. 必ず $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は成立するので, $f(\mathbb{R}^2) \supset \mathbb{R}^2$ を示せばよい. $y \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

[1] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とは $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ のこと.

とおくと, ${}^{\exists}x \in \mathbb{R}^2$ s.t. $y = f(x)$ であることは

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax_1 + bx_2 & = & y_1, \\ cx_1 + dx_2 & = & y_2 \end{array}\right.$$

を満たすかどうか, つまり連立方程式が解けるかどうかと同値である. 上を d 倍, 下を b 倍して

$$\left\{\begin{array}{rcl} adx_1 + bdx_2 & = & dy_1, \\ bcx_1 + bdx_2 & = & by_2, \end{array}\right.$$

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = dy_1 - by_2$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \frac{1}{ad - bc}(dy_1 - by_2),$$

また, 上に代入して

$$\frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) + bx_2 = y_1,$$

$$bx_2 = \frac{ad - bc}{ad - bc}y_1 - \frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) = \frac{-bc}{ad - bc}y_1 + \frac{ab}{ad - bc}y_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{ad - bc}(-cy_1 + ay_2)$$

を得る. すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる.

次に単射について考える.

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

とおく. 単射の定義の対偶から

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \quad f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 \\ c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

に対して, $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよい. $f(x) = f(\tilde{x})$ とすると

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax_1 + bx_2 & = & a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2, \\ cx_1 + dx_2 & = & c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2. \end{array}\right.$$

上を d 倍, 下を b 倍して

$$\left\{\begin{array}{rcl} adx_1 + bdx_2 & = & ad\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \\ bcx_1 + bdx_2 & = & bc\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \end{array}\right.$$

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = (ad - bc)y_1$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \tilde{x}_1$$

を得る. 次にこれを上に代入すれば $b \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られ, 下に代入すれば $d \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ を得る. つまり $b \neq 0$ もしくは $d \neq 0$ のどちらかが仮定されていれば $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られることになるが, $b = d = 0$, つまりそのどちらも成立しないときは $ad - bc \neq 0$ を満たさなくなるので, これらの仮定は全て $ad - bc \neq 0$ の仮定でまとめられる. すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

別解　線形代数の知識を使えば証明は簡潔になる．実際,

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと, $f(x) = Ax$ を意味し, $ad - bc \neq 0$ の条件から A は正則行列すなわち $A^{-1}A = AA^{-1} = E$(単位行列) を満たす行列 A^{-1} が存在する．また A^{-1} は

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で得られていた．上記解答例に合わせて議論していくと, 任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して, $y \in f(\mathbb{R}^2)$, つまりある $x \in \mathbb{R}^2$ が存在して $y = f(x)$ となるかどうかを考える．$A^{-1}A = E$ であったことに注意して

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y$$

の左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}Ax = A^{-1}y,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を得る．すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる．単射についても $f(x) = f(\tilde{x})$ ならば $x = \tilde{x}$ を示せばよいが, $Ax = A\tilde{x}$ の両辺に A^{-1} を写像としてかければ $x = \tilde{x}$ を得る．すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる．