2024/12/06/No.7

集合と論理・自習シート

問 1　X, $A_\alpha \subset X$ を集合とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ:

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

証明　($\subset$) を示す. $x \in (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$ とする. 補集合の定義より

$$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

このとき, ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$. (もしそうでないなら, ${}^\forall\alpha \in I, x \in A_\alpha$ となり, $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$, よって矛盾). つまり, $x \in A_{\alpha_0}^c$. よって

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

ゆえに ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}^c.$$

つまり $x \notin A_{\alpha_0}$. このとき, $x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ (もしそうでないなら, $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ だが, ${}^\forall\alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ となり矛盾). よって

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

ゆえに ($\subset$) が成立.

以上より等号成立. □

問 2　$f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X(\alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ.

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \supset \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha).$$

解答例　$y \in \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より, ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t.

$$y \in f(A_{\alpha_0}).$$

像の定義より, ${}^\exists x \in A_{\alpha_0}$ s.t.

$$y = f(x).$$

ここで, $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ より, 再び像の定義から

$$y \in f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 3　$f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X (\alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ.

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

解答例　$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ とする. 像の定義より, ${}^\exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ s.t.

$$y = f(x).$$

共通部分の定義より, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ なので,

$$y \in f(A_\alpha).$$

再び共通部分の定義より

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

□