集合と論理・自習シート

問 1　A_α, B を集合とする．ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である．次を証明せよ:

(1)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

(2)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(3)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す．$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする．$x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, つまり, 和集合の定義より $^\exists \alpha \in I$ s.t. $x \in A_\alpha$. よって, $x \in B \cap A_\alpha$. すなわち, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

となり

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

が成立.

($\supset$) を示す．$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$ とする．和集合の定義より $^\exists \alpha \in I$ s.t. $x \in B \cap A_\alpha$, つまり $x \in B$ かつ $x \in A_\alpha$. 再び和集合の定義より $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$$

となり

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

が成立.

以上により

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

□

(2) ($\subset$) を示す．$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする．$x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, つまり $^\exists \alpha \in I$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

s.t. $x \notin A_\alpha$ が成立する (実際, もしそうでないならば, ${}^\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, そのとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). つまり, $x \in B \setminus A_\alpha$. よって, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$$

となり

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$$

が成立.

(⊃) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists \alpha \in I$ s.t. $x \in B \setminus A_\alpha$. よって, $x \in B$ かつ $x \notin A_\alpha$, つまり $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ (実際, もしそうでないならば, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となるが, そのとき ${}^\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となり矛盾). よって

$$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$$

となり

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$$

が成立.

以上により

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

□

(3) (⊂) を示す. $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ とする. 和集合の定義より $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$. 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ のとき, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$, つまり $x \in B \cup A_\alpha$. 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(i), (ii) より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

となり

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

が成立.
(⊃) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$ とする. 共通部分の定義より, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$.
(ii) $x \notin B$ のとき, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$. (実際, もしそうでないなら, ${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ となるが, そのとき $x \notin B \cap A_{\alpha_0}$ となり, 仮定に矛盾.) よって $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

(i), (ii) より

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$$

となり

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

が成立.

以上より

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

$\square$

問 2　A_n を空でない集合とし, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ と仮定する. 集合 C_n を次の様に定義する:

$$C_1 := \emptyset, \quad C_n := A_1 \setminus A_n \quad (n \geq 2).$$

このとき, 次の (1), (2) を証明せよ.

(1)

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n \subset C_{n+1}.$$

(2)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

解答例　(1) $n = 1$ のとき, 空集合 $\emptyset$ はどんな集合であっても部分集合になるので, $\emptyset \subset A_1 \setminus A_2$ より

$$C_1 \subset C_2$$

が成立. $n \geq 2$ のとき,

$$C_{n+1} \subset C_{n+2}$$

を示す.

$$A_1 \setminus A_{n+1} \subset A_1 \setminus A_{n+2}$$

を示せばよい. $x \in A_1 \setminus A_{n+1}$ とすると, 集合の差の定義より

$$x \in A_1 \quad \text{かつ} \quad x \notin A_{n+1}.$$

仮定より $x \notin A_{n+2}$(もしそうでないなら, $x \in A_{n+2}$ だが, 仮定 $A_{n+2} \subset A_{n+1}$ より, $x \in A_{n+1}$ となり矛盾). ゆえに

$$x \in A_1 \setminus A_{n+1}$$

となり,

$$A_1 \setminus A_{n+1} \subset A_1 \setminus A_{n+2}.$$

$\square$

(2) ($\subset$) を示す. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \in C_n.$$

つまり, $x \in A_1 \setminus A_n$ より, $x \in A_1$ かつ $x \notin A_n$. ゆえに

$$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

よって

$$x \in A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

より

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

が成立.
($\supset$) を示す. $x \in A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする. $x \in A_1$ かつ $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. このとき, ${}^{\exists}n \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \notin A_n.$$

ゆえに $x \in A_1 \setminus A_n$. つまり, $x \in C_n$ なので

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

より

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \supset A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

が成立.
　以上より

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

□

問 3　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[1)]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

証明　「(1) ならば (2)」を示す. (1) を仮定する. 任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ を示す. $x \in A$ とする. $A \subset X$ より, $x \in X$ なので (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$ となる. つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし, 今は $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$ しかありえない. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する. 背理法で示す. もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, ある元 $x \in A \cap B^c$ が存在する. この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾. よって $A \cap B^c = \emptyset$.
「(3) ならば (1)」を示す.
($\subset$) を示す. $x \in A^c \cup B$ とする.

[1)]「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

(i) $x \in A^c$ のとき, $A^c = X \setminus A \subset X$ より, $x \in X$.

(ii) $x \in B$ のとき, $B \subset X$ より, $x \in X$.

以上より $x \in X$. (X は全体集合なので, つねに $x \in X$ となる.) よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
($\supset$) を示す. $x \in X$ とする.

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる. 実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる. □