集合と論理・自習シート

問 1　A, B を空でない集合とする．集合の包含関係や等号の定義に従って以下を証明せよ．

(1) $A \subset A \cup B$.

解答例　$x \in A$ とする．和集合の定義より $x \in A \cup B$ なので $(\subset)$ が成立．　$\square$

注: 多くの学生から記録表で質問があったが, $x \in A$ が言えれば, どんな集合 B を選んできても $x \in A \cup B$ が成立する．なぜなら

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義されているから．

(2) $A \subset A \cup \emptyset$.

解答例　$x \in A$ とする．和集合の定義より $x \in A \cup \emptyset$ なので $(\subset)$ が成立．　$\square$

(3) $A \cap B \subset A$.

解答例　$x \in A \cap B$ とする．共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$．よって $x \in A$ なので $(\subset)$ が成立．　$\square$

(4) $A \cap B \subset B$.

解答例　$x \in A \cap B$ とする．共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$．よって $x \in B$ なので $(\subset)$ が成立．

(5) $A \setminus B \subset A$.

問 2　A, B, C を空でない集合とする．集合の包含関係や等号の定義に従って以下を証明せよ．

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

解答例　$(\subset)$ を示す．$x \in A \cup (B \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B \cap C$.

(i) $x \in A$ のとき, 和集合の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ と言える．よって, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in C$ なので, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ と言える．よって, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

ゆえに $(\subset)$ が成立.

次に $(\supset)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. 共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$.

(i) $x \in A$ のとき, 和集合の定義より $x \in A \cup (B \cap C)$.

(ii) $x \notin A$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立. もしそうでないならば, $x \notin B$ または $x \notin C$ となる.

(ii-a) $x \notin B$ のとき, $x \notin A \cup B$ となり矛盾.

(ii-b) $x \notin C$ のとき, $x \notin A \cup C$ となり矛盾.

よって, $x \in B \cap C$ となり, $x \in A \cup (B \cap C)$.

ゆえに $(\supset)$ が成立.

以上より等号成立. □

$(\supset)$ の証明の別解 $(\supset)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. 共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$. つまり, ($x \in A$ または $x \in B$) かつ ($x \in A$ または $x \in C$).

(i) $x \in A$ かつ $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$.

(ii) $x \in A$ かつ $x \in C$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$.

(iii) $x \in B$ かつ $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$.

(iv) $x \in B$ かつ $x \in C$ のとき, $x \in B \cap C$ となり $A \cup (B \cap C)$.

ゆえに $(\supset)$ が成立.

注: この場合分けは有限個の組み合わせの場合には通用するが, この先, 無限を相手にする場合が発生するので万能な場合分けではない. 上の $x \in A$ と $x \notin A$ の場合分けをお勧めする.

問 3 A を集合とする. $\emptyset \subset A$ を次の 2 通りで証明せよ.

(1) 「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」の対偶「$x \notin A$ ならば $x \notin \emptyset$」を証明せよ.

解答例 「$x \notin A$ ならば $x \notin \emptyset$」を示す. $x \notin A$ とする. $\emptyset$ は元をひとつも持たない集合なので $x \notin \emptyset$. よって「$x \notin A$ ならば $x \notin \emptyset$」が成立. その対偶である「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」も成立. □

(2) 「$x \in \emptyset$」の真偽を求め「$(x \in \emptyset) \to (x \in A)$」の真偽を求めよ.

解答例 命題「$x \in \emptyset$」は常に偽である. よって「$(x \in \emptyset) \to (x \in A)$」は真となる. つまり, $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$. □