

集合と論理・自習シート

問1 p, q, r を命題とする. 同値の定義に従って次を証明せよ.

(1) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

(2) $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

(3) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(4) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

解答例

(1)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

以上により, 真理値が一致するので同値である.

(2)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

以上により, 真理値が一致するので同値である.

(3)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

以上により、真理値が一致するので同値である。

(4)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

以上により、真理値が一致するので同値である。

問2 p, q を命題とする. $\neg p \vee q$ という命題を

$$p \rightarrow q$$

とかいて、「 p ならば q 」と定義する. 同値の定義に戻って次を証明せよ¹⁾.

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

解答例

定義より $\neg q \rightarrow \neg p$ は

$$\neg(\neg q) \vee \neg p$$

で定義される.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg(\neg q)$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1

以上により、 $p \rightarrow q$ と $\neg q \rightarrow \neg p$ の真理値が一致するので同値である。

¹⁾ $p \rightarrow q$ に対して $\neg q \rightarrow \neg p$ のことを対偶と呼ぶ