

集合と論理・自習シート

問1 p, q, r を命題とする. 同値の定義に戻って次を証明せよ.

$$(1) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(2) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(3) \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$(4) \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

解答例

(1)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

以上により, 真理値が一致するので同値である.

(2)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

以上により, 真理値が一致するので同値である.

(3)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

以上により、真理値が一致するので同値である。

(4)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

以上により、真理値が一致するので同値である。

常に真である命題を**恒真命題**(トートロジー)といい I とかき、常に偽である命題を**恒偽命題**といい O とかく。

問2 p を命題とする。同値の定義に戻って次を証明せよ。

(1) $p \wedge I \equiv p$

(2) $p \vee I \equiv I$

(3) $p \wedge O \equiv O$

(4) $p \vee O \equiv p$

(5) $p \wedge (\neg p) \equiv O$

(6) $p \vee (\neg p) \equiv I$

解答例

(1) と (2)

p	I	$p \wedge I$	$p \vee I$
1	1	1	1
0	1	0	1

以上により、真理値が一致するのでそれぞれ同値である。

(3) と (4)

p	O	$p \wedge O$	$p \vee O$
1	0	0	1
0	0	0	0

以上により、真理値が一致するのでそれぞれ同値である。

(5) と (6)

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	O	$p \vee (\neg p)$	I
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1

以上により, 真理値が一致するのでそれぞれ同値である.