2025/01/10/No.10

集合と論理・自習シート

問 1　$X := \{a, b\}$ とする．X のべき集合 2^X を, 元を列挙する形で求めよ．また, X の部分部分集合族 (集合の集合) のうち, $\{a\}$ を含むものをすべて求めよ．

解答例　$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$．また, $\{a\}$ を含むものは, 元の個数が 1 個の集合族が

$$\mathcal{A} = \{\quad \{a\} \qquad\qquad \}.$$

元の個数が 2 個の集合族が

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \qquad\qquad \},$$
$$\mathcal{C} = \{\quad \{a\}, \{b\} \quad \},$$
$$\mathcal{D} = \{\quad \{a\}, \qquad X\}.$$

元の個数が 3 個の集合族が

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\} \quad \},$$
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \qquad X\},$$
$$\mathcal{G} = \{\quad \{a\}, \{b\}, X\}.$$

元の個数が 4 個の集合族がべき集合族, すなわち

$$\mathcal{H} = 2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

問 2　$X := \mathbb{N}$, $Y := \mathbb{N}(\text{even})$ とする．ただし, $\mathbb{N}$ は自然数全体, $\mathbb{N}(\text{even})$ は偶数の自然数全体を意味する．次で定義される関数 $f : X \to Y$

$$f(x) = 2x$$

は全単射であることを証明せよ．

解答例　まず全射であることを示す．つまり $f(X) = Y$ を示せばよい．($\subset$) を示す．$y \in f(X)$ とする．像の定義より ${}^{\exists}x \in X = \mathbb{N}$ s.t. $y = f(x) = 2x$．よって, y は偶数なので $y \in Y = \mathbb{N}(\text{even})$．($\subset$) が成立．

($\supset$) を示す．$y \in Y = \mathbb{N}(\text{even})$ とする．y は偶数の自然数なので, ${}^{\exists}x \in \mathbb{N}$ s.t. $y = 2x$ と表せる．つまり, $y = f(x)$．よって, 像の定義より $y \in f(X)$．($\supset$) が成立．

以上より等号成立．つまり $f : X \to Y$ は全射である．

次に単射であることを示す．$x_1, x_2 \in X = \mathbb{N}$ とする．$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ を示せばよい．$f(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = f(x_2)$．以上より $f : X \to Y$ は単射．

つまり $f : X \to Y$ は全単射である．　□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

問 3　$X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とし, $\sim$ を次の様に定義する:

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x + y' = y + x'.$$

次の問いに答えよ.

(1) $\sim$ は X の同値関係であることを証明せよ.

(2) $(1, 2)$ と $(3, 4)$ は同値か否か調べよ. また $(1, 2)$ と $(3, 3)$ は同値か否か調べよ.

解答例　(1) $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする.

$$x + y = y + x$$

より $(x, y) \sim (x, y)$, すなわち, 反射律が成立する. 次に $(x, y), (x', y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とし, $(x, y) \sim (x', y')$ を仮定する. このとき, $(x', y') \sim (x, y)$ を示せばよい. 仮定より

$$x + y' = y + x'.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x' + y &= y + x' \\ &= x + y' \\ &= y' + x. \end{aligned}$$

よって, $(x', y') \sim (x, y)$, すなわち, 対称律が成立する. 最後に $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とし, $(x, y) \sim (x', y'), (x', y') \sim (x'', y'')$ を仮定する. このとき, $(x, y) \sim (x'', y'')$ を示せばよい. **仮定より**,

$$x + y' = y + x', \quad x' + y'' = y' + x'',$$

$$x = y + x' - y', \quad y'' = y' + x'' - x'.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x + y'' &= (y + x' - y') + (y' + x'' - x') \\ &= y + x''. \end{aligned}$$

よって

$$x + y'' = y + x''$$

より $(x, y) \sim (x'', y'')$, すなわち, 推移律が成立する.

以上により, $\sim$ は X の同値関係である. □

(2) $(1, 2)$ と $(3, 4)$ について

$$1 + 4 = 2 + 3$$

より $(1, 2)$ と $(3, 4)$ は同値. また $(1, 2)$ と $(3, 3)$ について

$$1 + 3 \neq 2 + 3$$

より $(1, 2)$ と $(3, 3)$ は同値ではない.

注 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ は整数 $\mathbb{Z}$ を意味する．実際，この同値関係について，例えば $C((2,1))$ は

$$C((2,1)) = \{(2,1),(3,2),(4,3),\dots,(n+1,n),\dots\}$$

の様に差が $+1$ の元で構成されており，$C((1,2))$ は

$$C((1,2)) = \{(1,2),(2,3),(3,4),\dots,(n,n+1),\dots\}$$

のように差が -1 の元で構成されいる．$C((1,1))$ は

$$C((1,1)) = \{(1,1),(2,2),(3,3),\dots,(n,n),\dots\}$$

のように差が 0 の元で構成されいる．よって

$$\cdots C((1,4)),C((1,3)),C((1,2)),C((1,1)),C((2,1)),C((3,1)),C((4,1)),\cdots$$

を

$$\cdots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\cdots$$

と表記すれば，正にこれは $\mathbb{Z}$ そのものである．だだし，整数が未定義な前提で議論をするならば (1) の推移律の証明は以下のように書き換えた方がよい．

仮定より，

$$x+y'=y+x', \quad x'+y''=y'+x'',$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
(x+y'')+y' &= (x+y')+y'' \\
&= (y+x')+y'' \\
&= y+(x'+y'') \\
&= y+(y'+x'') \\
&= (y+x'')+y'.
\end{aligned}$$

よって

$$x+y''=y+x''$$

より $(x,y)\sim(x'',y'')$ が成立する．